

تحليل عددي لانتقال الحرارة في كوع

خلط باستخدام أسلوب CFD

اعداد الطلاب :

عثمان جبريل عبد الله محمد

علي مصطفى علي ابراهيم

بحث تكميلي لنيل درجة البكالريوس مرتبة الشرف في الهندسة

الميكانيكية

قسم الهندسة الميكانيكية

كلية الهندسة والتقنية

جامعة وادي النيل

فبراير 2016م

تحليل عددي لانتقال الحرارة في كوع خلط باستخدام أسلوب CFD

إعداد الطالب:

عثمان جبريل عبد الله محمد 102027

علي مصطفى علي ابراهيم 102029

بحث تكميلي لنيل درجة البكالوريوس مرتبة الشرف في الهندسة

الميكانيكية

**قسم الهندسة الميكانيكية
كلية الهندسة والتكنولوجيا
جامعة وادي النيل**

فبراير 2016م



الأية

قال تعالى :

(مُحَمَّدٌ رَسُولُ اللَّهِ وَالَّذِينَ مَعَهُ أَشَدَّاءُ عَلَى الْكُفَّارِ رُحْمَاءُ بَيْنَهُمْ تَرَاهُمْ رُكَّاعًا سُجَّدًا يَسْعُونَ فَضْلًا مِنَ اللَّهِ وَرَضُواً نَا سِيمًا هُمْ فِي وُجُوهِهِمْ مِنْ أَنْتِ السُّجُودُ ذَلِكَ مَثْلُهُمْ فِي التَّوْرَةِ وَمَثْلُهُمْ فِي الْإِنْجِيلِ كَرْرَعًا خَرَجَ شَطَأَهُ فَازْرَهُ فَاسْتَغْلَظَ فَاسْتَوَى عَلَى سُوقِهِ يُعِبِّرُ الزُّرَاعَ لِيغِيظَ بِهِمُ الْكُفَّارَ وَعَدَ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا وَعَمِلُوا الصَّالِحَاتِ مِنْهُمْ مَغْفِرَةً وَأَجْرًا عَظِيمًا).

الفتح : 29

الله اعلم

جهداً أنا ذي باسمك المنقوش من برد التوهج والجمال حسي لقائك في عيون الناس في بلادي جنوباً أو
شمال سمر الملامح يشبهونك سمرة أو مشية أو قامة لكنهم لا يشبهونك في الخصال .

إلى من أرضعتني الحب والحنان إلى رمز الحب وبلسم الشفاء إلى القلب الناصع بالبياض

والدُّجَى الْمُرِسَّ

إلى من جرع الكأس فارغاً ليسقيني قطرة حب إلى من كلت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم إلى القلب الكبير

والدرب العزيز

إلى القلوب الطاهرة الرقيقة والأنفوس البريئة التي عانت وتکبّدت المشقة لتضیی لی الدرب إلى
رياحین حیاتی

١٢

ألا تفتح الأشرعة وترفع المرساة لتنطلق السفينة في عرض بحر واسع مظلم هو بحر الحياة
وفي هذه الظلمة لا يضيء إلا قنديل الذكريات الإخوة البعيدة إلى الذين أحببتهם وأحبواني

• ປຸ່ມຕົວ

إلى من أعيش لكلمته وأصبو لارتقى لها ...أنقى أسماء في حياتي ...

السادسون

شكراً وتقدير

لابد لنا ونحن نخطو خطواتنا الأخيرة في الحياة الجامعية من وقفة نعود إلى أعوام قضيناها في رحاب الجامعة مع أساتذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين بذلك جهوداً كبيرة في بناء جيل الغد لتبث الأمة من جديد ..

و قبل أن نمضي نقدم أسماء آيات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة للذين حملوا أقدس رسالة في الحياة ... إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة ...
إلى جميع أساتذنا الأفاضل ...
ونخص بالتقدير والشكر :

إلى من علمنا التفاؤل والمضي إلى الأمام إلى من رعاانا وحافظ علينا إلى من وقف إلى جانبنا عندما ضللنا الطريق ...

الأستاذ : مصعب الحاج

الذي نقول له بشراك قول رسول الله صلى الله عليه وسلم :
"أن الحوت في البحر ،والطير في السماء ، يصلون على معلم الناس الخير "
إلى من زرع التفاؤل في دربنا وقدموا لنا المساعدات والتسهيلات والأفكار والمعلومات ،ربما دون أن يشعروا بدورهم بذلك فلهم منا كل الشكر والتقدير.

الباحثون

فهرس المحتويات :

رقم الصفحة	الموضوع	الرقم
i	الأية	
ii	الإهداء	
iii	الشكر والعرفان	
iv	فهرس المحتويات	
vii	فهرس الأشكال	
ix	فهرس الجداول	
x	الملخص	
الباب الأول		
1	مقدمة	1.1
2	مقدمة عن الأكواع	2.1
2	أنواع الأكواع	3.1
4	تطبيقات الأكواع	4.1
4	الهدف من البحث	5.1
الباب الثاني		
5	نبذة تاريخية عن ديناميكا المواقع المحاسبة	1.2
الباب الثالث		
8	ديناميكا المواقع المحاسبة (cfd)	1.3
8	تعريفات	2.3
9	إستخدامات نتائج تحليلات (cfd)	3.3
9	إستخدامات cfd	4.3
10	تطبيقات إسلوب cfd	5.3
11	مميزات المحاكاة عن التجارب	6.3
11	الأسباب التي أدت لاستخدام إسلوب (cfd)	7.3
12	طرق العددية المستخدمة في cfd	8.3

12	المكونات الرئيسية لدورة تصميم إسلوب cfd	9.3
13	كيفية عمل إسلوب cfd	10.3
14	المعادلات الحاكمة لعملية ديناميكا الموائع المحاسبة	11.3
15	DISCRETIZATION عملية	12.3
15	النقاط التي يجب مراعاتها في مشكلة الموائع	13.3
15	خطوات حل المشكلة بإستخدام إسلوب cfd	14.3
16	أنواع التقسيمات (mesh)	15.3
17	الشروط الحدية (Boundary Condition)	16.3
18	طريقة الحل التكرارية	17.3
19	محاكاة التدفق بإستخدام الحاسوب	18.3
19	الأشياء التي تعتمد عليها المحاكاة	1.18.3
19	الأشياء التي تعتمد عليها جودة نتائج المحاكاة	2.18.3
20	الشك والخطأ في إسلوب cfd	19.3
20	أنواع الأخطاء	1.19.3
21	التحقق من رموز cfd	2.19.3
21	التحقق من نماذج cfd	3.19.3
22	عيوب إسلوب cfd	20.3

الباب الرابع

23	النمذجة والمحاكاة وتحليل النتائج	1.4
24	كوع 90 درجة له مدخل كبير ومدخل صغير	2.4
26	الشروط الحدية الإبتدائية	1.2.4
29	زيادة درجة الحرارة	2.2.4
30	زيادة السرعة ودرجة الحرارة	3.2.4
32	كوع 90 درجة يحتوي على مدخلين صغيرين	3.4
33	الشروط الحدية الإبتدائية	1.3.4
34	زيادة درجة الحرارة	2.3.4
35	زيادة درجة الحرارة والسرعة	3.3.4
37	كوع حرف (T)	4.4

37	الشروط الحدية الإبتدائية	1.4.4
40	زيادة درجة الحرارة	2.4.4
41	زيادة السرعة ودرجة الحرارة	3.4.4
الباب الخامس		
43	الخلاصة	1.5
44	التوصيات	2.5
45	المراجع	

فهرس الأشكال

رقم الصفحة	الشكل	قلم الشكل
2	كوع 45 درجة	1-1
3	كوع 90 درجة	2-1
3	كوع 180 درجة	3-1
4	مثال لتطبيقات الأكواع	4-1
10	أمثلة لتطبيقات cfd	1-3
14	عملية cfd	2-3
17	التقسيمات بإستخدام طريقة العناصر المحددة	3-3
18	الشروط الحرية للسريان في أنبوب	4.3
24	كوع خلط	1-4
25	الشكل الهندسي	2-4
25	التقسيمات	3-4
27	درجة الحرارة	4-4
27	الضغط	5-4
28	السرعة	6-4
29	درجة الحرارة	7-4
30	درجة الحرارة	8-4
31	الضغط	9-4
31	السرعة	10-4
32	الشكل الهندسي	11-4
32	التقسيمات	12-4
33	درجة الحرارة	13-4
33	الضغط	14-4

34	السرعة	15-4
34	درجة الحرارة	16-4
35	درجة الحرارة	17-4
36	الضغط	18-4
36	السرعة	19-4
37	كوع حرف (T)	20-4
38	الرسم الهندسي	21-4
38	التقسيمات	22-4
39	درجة الحرارة	23-4
39	الضغط	24-4
40	درجة الحرارة	25-4
41	درجة الحرارة	26-4
41	الضغط	27-4

فهرس الجداول :

11	مميزات المحاكاة عن التجارب	1-3
23	خواص الماء عند الظروف الطبيعية	1-4

الملخص :

أصبحت الديناميكا المحسوبة ذات تأثيرات كبيرة في مجالات العلوم والتكنولوجيا، كما أن الأنظمة المعقدة التي كان يصعب أو يستحيل معالجتها باستخدام الطرق التحليلية، تمت محاكاتها بنجاح باستخدام الأدوات التي وفرتها الديناميكا الحاسوبية ، في هذا البحث تم القيام بتحليل عددي لانتقال الحرارة في كوع خلط عن طريق المحاكاة بإستخدام أسلوب cfd ، والحصول على نتائج المحاكاة في شكل صور ، بحيث يمكن معرفة الخواص الفيزيائية (درجة الحرارة ، الضغط ، السرعة) عند أي نقطة خلال الكوع .

في هذا المشروع تم التطرق الي مقدمة عامة عن الديناميكا المحسوبة ومقدمة عن الأكواع وأنواعها الأكثر إستخداماً وبعض من تطبيقاتها ، كما تناول المشروع نبذة تاريخية عن أسلوب cfd ومقدمة تعريفية عنه ومميزاته وعيوبه وطريقة عمله ، وتطبيقاته العامة ، أيضاً تم القيام بإجراء محاكاة على كوع خلط بإستخدام برنامج (ansys-fluent) حيث تم ملاحظة وتحليل نتائج المحاكاة عند ظروف محددة وعند التغيير في شكل الكوع .

الباب الأول

المقدمة

الباب الأول

1.1 مقدمة :

الميكانيكا الحاسوبية هي فرع من فروع المعرفة المعنوية بإستخدام الطرق الحاسوبية بهدف دراسة الظواهر التي تحكمها مبادئ الميكانيكا ، وقبل ظهور الحوسبة العلمية (والتي تسمى أيضاً بعلم الحوسبة) كطريقة ثلاثة بجانب العلوم النظرية والتجريبية ، كانت الميكانيكا الحاسوبية تعتبر جزءاً فرعياً من الميكانيكا التطبيقية ، أما حالياً فهي تعد جزءاً فرعياً من ضمن علم الحوسبة (الحوسبة العلمية) .

تعتبر الميكانيكا الحاسوبية متعددة التخصصات ، حيث أنها تجمع بين أكثر من فرع من فروع المعرفة، فأركانها الثلاث هي الرياضيات وعلوم الحاسوب والميكانيكا . ويعد كل من ديناميكا المواقع الحسابية والديناميكا الحرارية الحاسوبية والكهرومغناطيسيات الحاسوبية وميكانيكا المواد الصلبة الحاسوبية بعضاً من التخصصات العديدة الموجودة ضمن الميكانيكا الحاسوبية . ومن أقسام الرياضيات الأكثر علاقة بالميكانيكا الحاسوبية المعادلات التقاضية الجزئية والجبر الخطي والتحليل العددي، ومن أكثر الطرق العددية المستخدمة فيها هي طريقة العناصر المحددة والحجم المحدد والفروق المحددة . في ميكانيكا المواد الصلبة، تُعتبر طرق العناصر المحددة أكثر إنتشاراً مقارنة بطرق الفروق المحددة، بينما في ميكانيكا المواقع والديناميكا الحرارية والكهرومغناطيسيات تكون تقريباً طرق الفروق المحددة أكثر إستخداماً . في حين يُعتبر أسلوب العناصر المحددة بشكل عام أقل انتشاراً، إلا أن لديه مكانة في مجالاتٍ معينة مثل الهندسة الصوتية .

وفيما يتعلق بالحوسبة، تلعب كل من برمجة الحاسوب والخوارزميات والحوسبة المتوازية دوراً كبيراً في الميكانيكا الحاسوبية، وتُعتبر لغة فورتران هي لغة البرمجة الأكثر استخداماً في المجتمعات العلمية، بما في ذلك الميكانيكا الحاسوبية . وقد زاد في الأونة الأخيرة إنتشار لغة البرمجة C^{++} ، إلا أن

مجتمع الحوسبة العلمية كان بطبيئاً في إتخاذ لغة البرمجة (C^{++}) كلغة مشتركة ؛ بسبب طريقتها الطبيعية للغایة في التعبير عن الحوسيات الرياضية بالإضافة الى قدراتها التصويرية المدمجة ، كما أن الماتلاب يستخدم على نطاق واسع ، خاصةً في التطور السريع للتطبيقات وتحقيق النماذج.

2.1 مقدمة عن الأكواع :

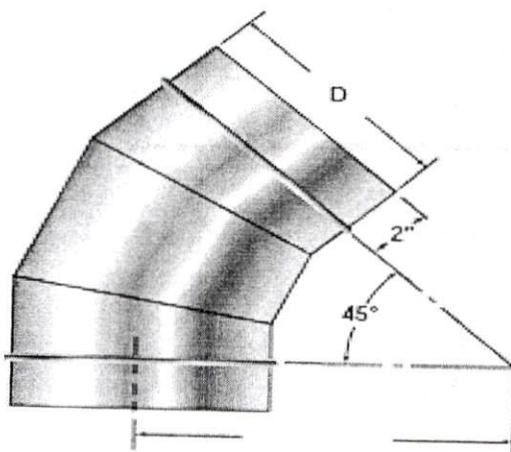
وظيفة الكوع هي تغيير إتجاه تدفق المائع في نظام الأنابيب ، حيث يعمل الكوع على تغيير إتجاه السريان؛ وهذا يؤدي إلى تقليل الضغط على النظام بسبب تأثير الاحتكاك ، وإعادة التسارع .

يدخل المائع عبر مدخل الكوع ويستمر في السريان حتى ينحرف بزاوية نحو مخرج الكوع ، حيث يتم تحديد زاوية الإنحراف من خلال التصميم على حسب خصائص المائع والسرعة المطلوبة .

3.1 أنواع الأكواع :-

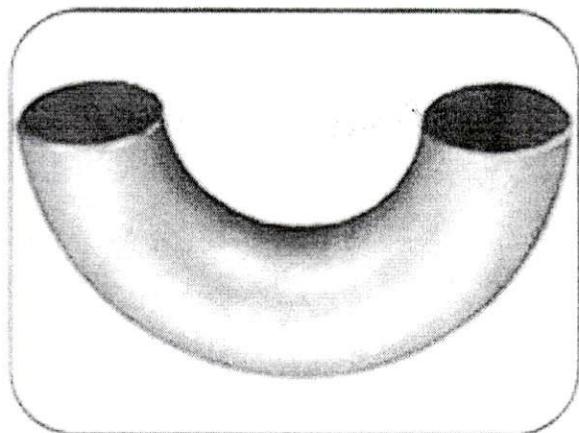
هناك ثلاثة أنواع من الأكواع على حسب زاوية التصميم :

1- كوع 45 درجة : وهو الذي ينحرف فيه المائع بزاوية مقدارها 45 درجة .



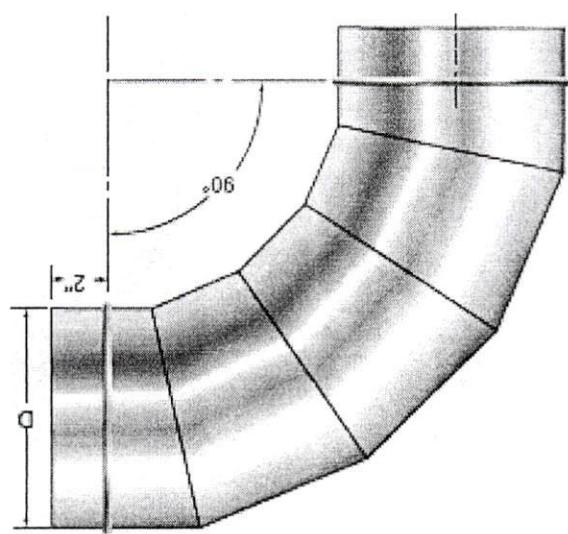
الشكل (1-1) كوع 45 درجة

અંગ 180 બેસ (3-I) જામ



અંગ 180 બેસ લાઇન કોર્ટ ડાયરી : અંગ 180 બેસ -3

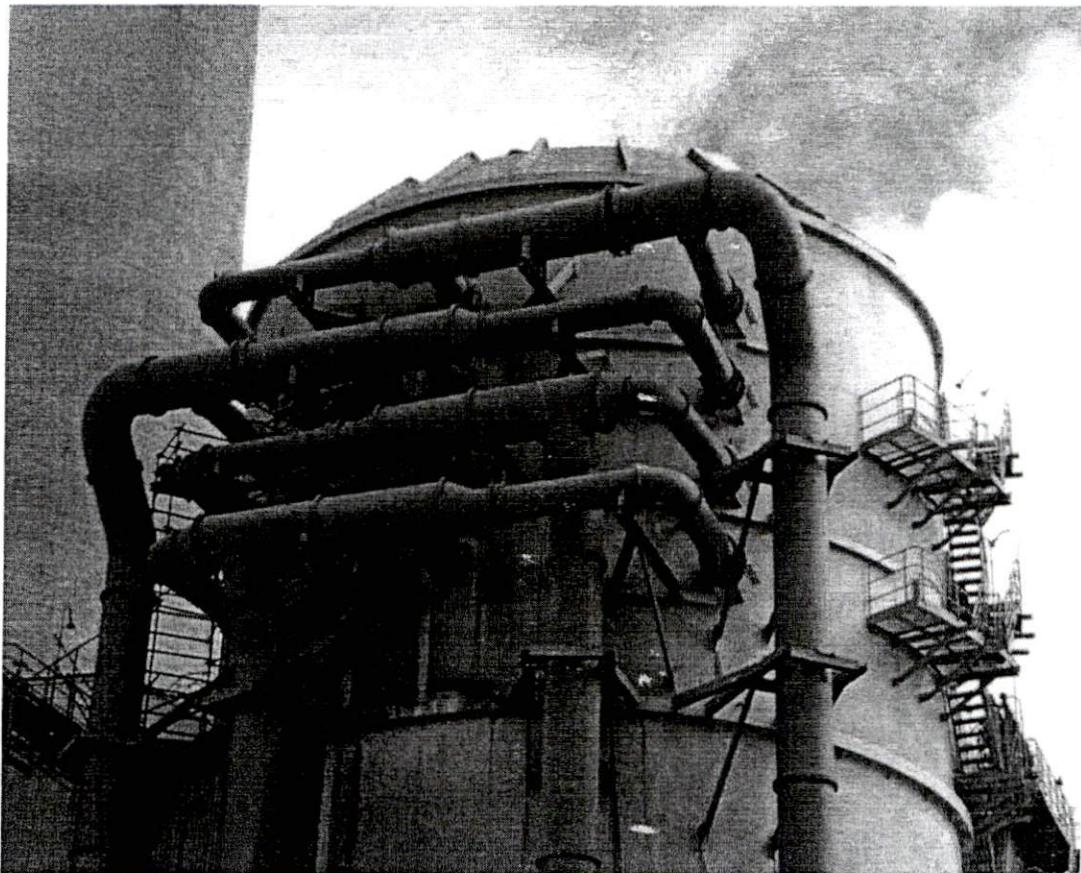
અંગ 90 બેસ (2-I) જામ



અંગ 90 બેસ લાઇન કોર્ટ ડાયરી : એફ પ્રાર્ટ સ્પર્ટ લાઇન કોર્ટ ડાયરી 06 -2

4.1 تطبيقات الأكواع :

للأكواع مجموعة كبيرة من الإستخدامات ، حيث تستخدم لتغيير إتجاه المائع وتقليل الضغط في شبكات المياه العامة وفي نقل البخار من المراجل ؛ كما في محطات القدرة الحرارية والمفاعلات النووية ، كما تستخدم في أنابيب نقل النفط وغيرها من الإستخدامات .



الشكل (4-1) مثال لتطبيقات الأكواع

5.1 الهدف من البحث :

يهدف البحث الى اجراء عملية نمذجة ومحاكاة لإنقال الحرارة في كوع خلط والحصول على النتائج في شكل صور بحيث يمكن معرفة الخواص الفيزيائية في أي نقطة خلال الكوع .

الباب الثاني

**نبذة تاريخية عن ديناميكا المواقع
المحسبة**

الباب الثاني

1.2 نبذة تاريخية عن ديناميكا الموائع المحosome :

في العصور القديمة تم إنشاء شبكات المياه (القنوات و الموانئ و الحمامات وغيرها) .

أرخميدس (287 - 212 ق.م) بادر في مجالات الميكانيكا الإستاتيكية و الموائع و قياس أحجام الكائنات .

ليوناردو دافينشي (1452-1519م) قام بمراقبة جميع الظواهر الطبيعية وله مقالات في ميكانيكا الموائع (حركة المياه والدلوامات وإرتفاع وإنخفاض الأمواج) .

إسحاق نيوتن (1643-1727م) له اسهامات عديدة في ميكانيكا الموائع منها، القانون الثاني للديناميكا ومفهوم الزوجة والإجهاد والإسططاله والعلاقة بين سرعة الموجات و الطول الموجي .

في القرن الثامن عشر و التاسع عشر تم القيام بمحاولات كثيرة في وصف رياضي لحركة السوائل منها : دانيال بيرنولي (1700 - 1782م) قام بإشتقاق معادلة برنولي .

ليوناردو أويلر (1707 - 1783م) إقترح معادلات أويلر التي تصف المحافظة على الزخم في السوائل و حفظ الكتلة .

أوزبورن رينولدز (1842 - 1912م) قام بنشر حوالي 70 بحثاً عن مجموعة واسعة من العلوم والهندسة ، منها رقم رينولدز الذي يمثل العلاقة بين قوى القصور الذاتي والزوجة في السوائل وهو يوضح عملية إنتقال السريان من رقائق إلى مضطرب .

في الجزء الاول من القرن العشرين تم انجاز الكثير من العمل علي نظريات الطبقات الحدية منها : (boundary layers)

لودويج (Ludwig 1875 - 1953) : نظرية الطبقة المتاخمة والإختلاط وإنضغاط السريان .

فون كارمان (von karman 1881 - 1963) قام بتحليل ما يعرف الآن باسم دوامة الشارع . (vortex street)

جيوفري إنجرام تايلور (Geoffrey Ingram Taylor 1886 - 1975) النظرية الاحصائية للإضطراب وتايلور ميكروسكيل (Taylor micro scale)

أندري نيكولايفيتش كولموجروف (Andrei Nikolayevich kolmogrov 1903-1987) مقاييس و طيف الطاقة العالمي .

لويس فراي ريتشارد سون (Lewis fry Richardson 1933 - 1983) في عام 1922 وضع لويس ببداية نظام التنبؤ بأحوال الطقس .

في عام 1960 ساهم قسم النظريات في لوس أنجلوس في كثير من الطرق العددية التي لا تزال تستخدم حتى اليوم مثل :-

الجسيمات في الخلية (PIC) .

علامة وخلية (MAC) .

نموذج (K-turbulence) .

في عام 1970 قامت مجموعة من كلية امبريال - لندن بتطوير :

رموز السريان المكافئ (genmix)

رموز Vorticity – stream function

نموذج من thek – equation التي تستخدم اليوم .

وهنالك شخصيات أخرى عديدة مثل لورن دالمبير وسيميون دنيس بواسون وجوزيف لويس لاجرانج

وسيمون دي لا بلاس لهم اسهامات عديدة في مجال cfd وكل هذا يشكل أساس الحديث .

الباب الثالث

ديناميكا المائع الحوسبة

Computational fluid

dynamic

(cfd)

الباب الثالث

1.3 ديناميكا المواقع المحاسبة (cfd) :

ديناميكا المواقع تدرس تدفق السوائل بإحدى هذه الطرق :

ديناميكا المواقع التجريبية .

ديناميكا المواقع النظرية .

ديناميكا المواقع الحسابية .

2.3 تعريفات :

ديناميكا المواقع المحاسبة أو حركيات المواقع المحاسبة هي إحدى فروع ميكانيكا المواقع التي تستخدم الطرق العددية والخوارزميات لحل المسائل التي تتضمن سريلان المواقع ، وتحليل نتائج المحاكاة .

حيث يتم استخدام الحواسيب لإجراء ملابس العمليات الحسابية اللازمة لمحاكاة التفاعل والتأثير المتبادل بين المواقع والأسطح المختلفة .

ديناميكا المواقع المحاسبة هي علم التنبؤ بتدفق السوائل وإنتقال الحرارة ، والكتلة والظواهر ذات الصلة ؛ من خلال حل المعادلات الرياضية التي تحكم هذه العمليات .

ديناميكا المواقع المحاسبة هي عبارة عن محاكاة لأنظمة السوائل باستخدام النماذج الهندسية والطرق العددية عن طريق الحاسوب .

(cfd) هو مجال بحوث متعددة الأغراض يجمع بين الفيزياء والرياضيات التطبيقية وعلوم الحاسوب .

3.3 إستخدامات نتائج تحليلات (cfd) :

• دراسة التصاميم الجديدة .

• تطوير المنتجات .

• إكتشاف الأخطاء وإصلاحها .

• حل المشاكل المتعلقة بالتحليل وتصميم النماذج .

• إعادة التصميم .

4.3 إستخدامات cfd

المحاكاة بإسلوب (cfd) تمكن العلماء والمهندسين من أداء التجارب العددية (أي المحاكاة

الحاوسبة) في مختبر تدفق ظاهري ، حيث يمكن :

• مهندسي السيارات من تحسين الخصائص الديناميكية الهوائية .

• المهندسين الكيميائيين من تعظيم العائد من معداتهم .

• مهندسي البترول من وضع إستراتيجيات أفضل لاستخراج النفط .

• خبراء الإرصاد الجوي من التنبؤ بالطقس والتحذير من الكوارث .

• الجراحين لعلاج أمراض الشرايين (ديناميكا الدم الحسابية) .

• خبراء السلامة للحد من المخاطر الناجمة من الإشعاع وغيره .

• المهندسين المعماريين من تصميم بيوت معيشية مريحة وآمنة .

5.3 تطبيقات إسلوب cfd :

بما أن إسلوب cfd له العديد من المزايا فان له العديد من الإستخدامات منها :-

أ- صناعة الطائرات .

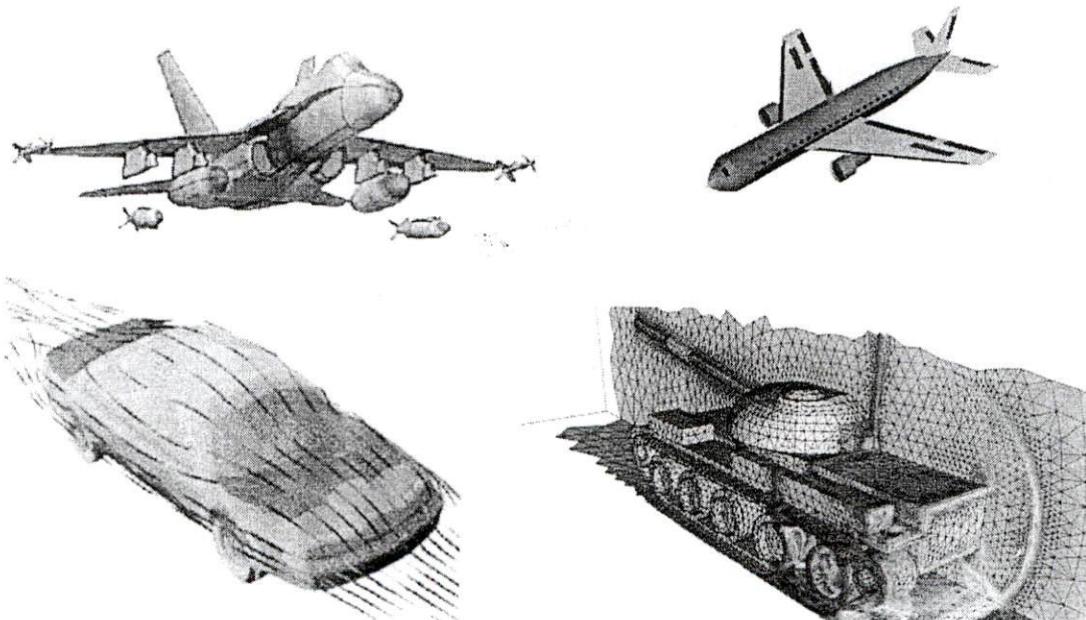
ب- تصميم السيارات .

ج- الطب الحيوى .

د- المعالجة الكيميائية .

هـ- الحرارة و التهوية و تكييف الهواء .

و- الهايدروليک و الطاقة و غيرها.



الشكل (1-3) أمثلة لتطبيقات cfd

6.3 مميزات المحاكاة عن التجارب:

أسلوب cfd يعطي نظرة ثاقبة على أنماط التدفق التي تعتبر صعبة ومكلفة أو مستحيلة بإستخدام التقنيات التقليدية (التجارب).

العامل	التجارب	المحاكاة بإستخدام (cfd)
التكلفة	مكلفة	رخيص
الזמן	طويل	قصير
السلامة	بعض الخطورة	آمن
المقاسات	صغيرة أو متوسطة	جميع المقاسات
الاستخدام	مجموعة محددة من المشاكل وحالات التشغيل واقعية	لأي مشكلة وحالات تشغيل واقعية
القياس	بواسطة أجهزة القياس	عن طريق الحاسوب

الجدول(3-1) مميزات المحاكاة عن التجارب

7.3 الأسباب التي أدت لـإستخدام أسلوب (cfd) :

- التكلفة العالية لتصميم وعمل النماذج (صعوبة عمل نموذج بالحجم الكامل) .
- المخاطر الناجمة عن التجارب المعملية (خطر الإشعاع - الانفجار - التلوث) .
- التأثيرات البيئية التي تؤثر على التجارب (تغيرات الطقس) .
- صعوبة نقل الأدوات والمعدات المستخدمة في التجارب .

عموماً ، إسلوب cfd لا يحل محل القياسات تماماً لكن المبلغ من التجارب والتكلفة الإجمالية يمكن أن تتحفظ بشكل كبير .

8.3 الطرق العددية المستخدمة في cfd :

أ- طريقة العناصر المحددة (Finite element method) :

هي طريقة تحليل عددي لإيجاد الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية الجزئية بالإضافة إلى الحلول التكاملية. يعتمد الحل إما على إلغاء المعادلات التفاضلية الجزئية نهائياً (في الحالات الساكنة) أو تقريب المعادلات التفاضلية الجزئية إلى معادلات جبرية والتي يمكن حلها باستخدام عدة طرق كطريقة أويلر .

هناك العديد من التطبيقات لطريقة العناصر المحددة وأغلبها تتعلق بالهندسة الميكانيكية بشكل أو بآخر، حيث تستخدم هذه الطريقة ضمن عملية تصميم وتطوير المنتجات المختلفة. بعض برامج حساب العناصر المحددة الحديثة تقوم بدراسة الحرارة، المغناطيسية الكهربائية، تدفق السوائل...الخ.

في مجال ميكانيكا السوائل والمنشآت المائية يمكن تحليل جريان السوائل والمنشآت المعرضة إلى ضغوط مائية كبيرة كالغواصات وغيرها باستخدام طريقة العناصر المحددة .

ب- طريقة الحجوم المحددة .

ج- طريقة الفروقات المحددة .

9.3 المكونات الرئيسية لدورة تصميم إسلوب cfd :

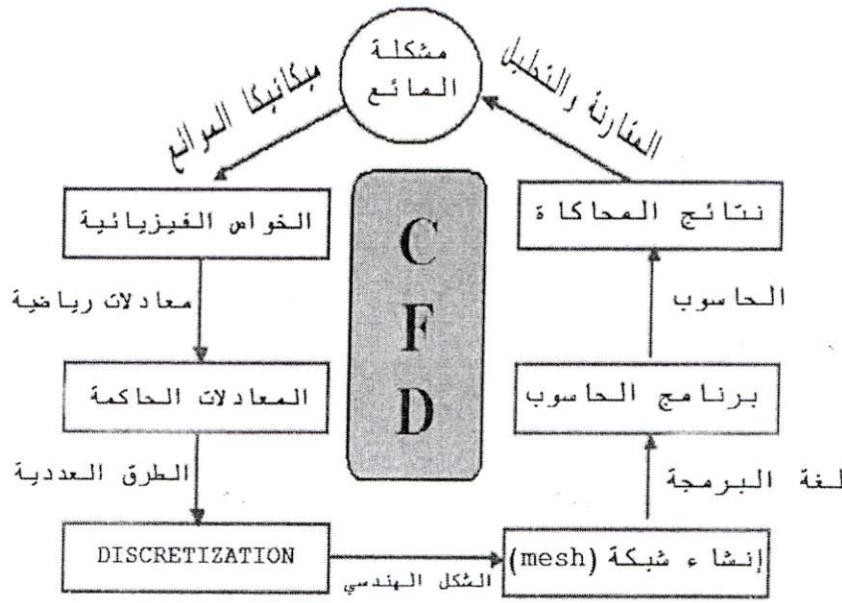
- الإنسان : وهو المحلل الذي يذكر المشكلة المراد حلها .

- المعرفة العلمية : نماذج وأساليب أُعربت رياضياً .

- الأكواد الحاسوبية : وهي البرامج التي تجسد المعرفة وتقدم تعليمات مفصلة (الخوارزميات) .
- أجهزة الكمبيوتر : هي التي تؤدي الحسابات الفعلية .
- الكائن البشري : وهو الذي يتقد ويفسر نتائج المحاكاة .

10.3 كيفية عمل أسلوب cfd :

- 1- يجب معرفة الخواص الفيزيائية - للمشكلة المراد حلها - عن طريق ميكانيكا المواقع ، ثم وصف هذه البنية في شكل معادلات رياضية .
 - 2- تحويل هذه المعادلات التحليلية الى معادلات عددية يمكن حلها بواسطة الحاسوب .
 - 3- تقسيم المشكلة الى اجزاء صغيرة ثم كتابة برنامج لحلها عن طريق لغات البرمجة .
 - 4- تحديد الشروط الحدية وإختيار إسلوب الحل المناسب .
 - 5- إجراء الحل .
 - 6- عملية تحليل النتائج وعمل مقارنة بينها وبين التجارب السابقة والمشاكل الحقيقية ، إذا كانت النتائج غير كافية لحل المشكلة يجب تكرار العملية حتى يتم التحصل على حل مقنع .
- و الشكل (2-3) يوضح كيفية عمل أسلوب cfd .



الشكل (2-3) عملية cfd

١١.٣ المعادلات الحاكمة لعملية ديناميكا المواقع المحاسبة :

معادلات نافير ستوكس (Navier – Stokes) هي المعادلات الحاكمة لдинاميكا المواقع الحسابية

، وهي تقوم على مبدأ الحفاظ على الخصائص الفيزيائية للمائع (الكتلة – الطاقة – الزخم) حيث يتم ملاحظة التغيير في المدخلات والمخرجات لهذه الخصائص .

المعادلات الحاكمة هي معادلات تحليلية يمكن للإنسان فهمها وحلها ولكن اذا أردنا حلها عن طريق

الحاسوب يجب تحويلها الى نموذج (discretized) .

12.3 : DISCRETIZATION عملية

عملية discretization : هي عملية تحويل المعادلات التفاضلية الجزئية (PDE) الى مجموعة معادلات جبرية عددية يسهل حلها بواسطة الحاسوب .

13.3 النقاط التي يجب مراعاتها في مشكلة المواقع :

- يجب أن يوحذ بعين الإعتبار الظواهر الفيزيائية .
- الشكل الهندسي والظروف التشغيلية .
- العقبات الداخلية (أسطح خالية - واجهات) .
- نوع التدفق أو السريان (صفائحي - مضطرب - ثابت - متقلب) .
- الهدف من تحليل cfd الذي سيتم تنفيذه .
 - أفضل طريقة تؤدي الي تحسين الأداء .
 - أسهل طريقة تؤدي الي الهدف وتحقق المطلوب .

14.3 خطوات حل المشكلة بإستخدام إسلوب cfd :

- 1- اختيار نموذج التدفق المناسب والإطار المرجعي .
- 2- تمييز القوى التي تؤثر على حركة السوائل .
- 3- تعريف المجال الحسابي الذي يحل المشكلة .
- 4- تحديد معادلات حفظ الكتلة والطاقة والزخم .

5- تبسيط المعادلات الحاكمة ، للحد من الجهد الحاسوبي .

• إستخدام المعلومات المتوفرة عن نظام السريان السائد .

• التحقق من التماضيات وإتجاهات السريان (1D / 2D) .

• إهمال الشروط التي لا تؤثر أو لها تأثير بسيط على النتائج .

• إستخدام المعرفة المسبقة (بيانات القياس ونتائج cfd) .

6- إضافة العلاقات الأساسية وتحديد الشروط الإبتدائية (الحدية) .

7- إنشاء شبكة (التحليل إلى خلايا أو عناصر) .

15.3 أنواع التقسيمات : (mesh)

هناك ثلاثة أنواع من التقسيمات (الشبكات) المستخدمة في cfd :

أ- شبكات منتظمة .

ب- شبكات غير منتظمة .

ج- كتل الشبكات المنتظمة .

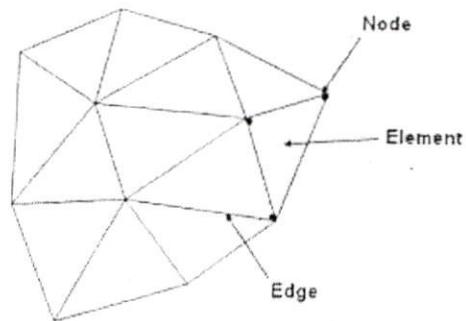
إذا كان لدينا نظام معقد يمكننا إستخدام الشبكات الغير منتظمة ، في الهندسة عموماً تستخدم

الشبكات غير المنتظمة ؛ بحيث تكون التقسيمات صغيرة جداً في مناطق التدفق الأعلى والعكس .

يعمل cfd علي تقسيم الشكل الي عدة كتل من الشبكات المنتظمة داخل مجال الشبكة الكلية الغير

منتظمة .

الشكل (3-3) يوضح التقسيمات بطريقة العناصر المحددة حيث يتم تقسيم الشكل الى مجموعة من العقد والعناصر .



الشكل (3-3) التقسيمات بإستخدام طريقة العناصر المحددة

16.3 الشروط الحدية : (Boundary Condition)

لحل نظام المعادلات نحن بحاجة الي شروط حدية ، وشروط الحدود النموذجية في cfd هي :

1- شروط المدخل .

2- شروط التأاظر .

3- شروط الحدود المادية .

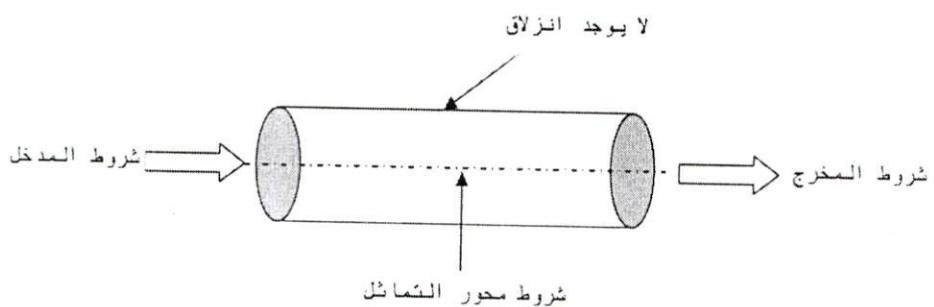
4- ظروف الضغط .

5- شروط المخرج .

مثلاً : الشكل التالي يوضح أنبوب ، سريان المائع فيه من اليسار لليمين . حيث يمكننا استخدام مدخل في الجانب الأيسر ، مما يعني أننا يمكن أن نحدد السرعة يدوياً . في الجانب الأيمن يمكننا استخدام شروط المخرج الحدية لحفظ كل الخصائص ثابتة .

في جدار الأنابيب ، يمكننا أن نحدد السرعة صفر ، وهذه هي شروط عدم الإنزلاق .

في منتصف الأنابيب يمكن استخدام شروط التاطر .



الشكل (3-4) الشروط الحدية للسريان في أنبوب

17.3 طريقة الحل التكرارية :

المعادلات الجبرية الغير خطية يجب أن تحل بشكل تكراري .

التكرار الخارجي: يتم تحديث معاملات كل حل على حدٍ باستخدام قيم من التكرار السابق وذلك

للأني:-

- التخلص من القيم الغير خطية على طريقة نيوتن .

- حل المعادلات الحاكمة بطريقة منفصلة .

التكرار الداخلي : التسلسل الناتج من المشاكل الثانوية الخطية عادة يتم حلها عن طريق إسلوب التكرار (التدرجات المتقاربة - شبكات متعددة) لأن المعالجة المباشرة (جاؤس للحذف) باهظة التكاليف .

معايير التقارب : هي ضرورية للتحقق من دقة الحل النسبي ؛ حيث يكون الحل أكثر دقة كلما اقترب الحل العددي من الحل التحليلي .

18.3 محاكاة التدفق بإستخدام الحاسوب:

1.18.3 الأشياء التي تعتمد عليها المحاكاة:

- اختيار الخوارزميات و هيكل البيانات العددية .
- أدوات الجبر الخطي و معايير الحل التكراري .
- جودة التقسيمات و حجمها .
- الوقت لكل الخطوة و معدلات التكرار الخارجي .
- لغات البرمجة المستخدمة (أكثر رموز cfd مكتوبة في لغة فورتران) .

2.18.3 الأشياء التي تعتمد عليها جودة نتائج المحاكاة:

- النموذج الرياضي و الافتراضات .
- نوع التقارب و الإستقرار للنظام العددي .
- الشبكة ، وقت الخطوة ، مؤشرات الخطأ ، و وقف المعايير .
- يتم إجراء تحليل نتائج العمل من نتائج المحاكاة و ذلك لإستخراج النتائج المطلوبة .

19.3 الشك والخطأ في إسلوب cfd :

درجة الوثوق في نتائج محاكاة cfd تعتمد على الأثر التراكمي لأخطاء مختلفة .

يتم تعريف الشك (عدم اليقين) بأنه نقص محتمل بسبب عدم المعرفة (مثل اضطراب النماذج) ، بينما تعرف الأخطاء بأنها نقص المعرفة لأسباب أخرى .

1.19.3 أنواع الأخطاء :

1- أخطاء معروفة وهي الأخطاء التي تم التعرف عليها وطلب تقليلها أو التخفيف منها أو حتى إزالتها

: ومنها :

- أخطاء النماذجة بسبب عدم اليقين أو التبسيط .

- أخطاء عملية (discretization) وهي الأخطاء في تحويل المعادلات التفاضلية إلى معادلات جبرية.

- أخطاء التقارب التكراري الذي يعتمد على معايير التوقف .

- أخطاء التكرارات بسبب العمليات الحسابية الكثيرة .

2- أخطاء غير معروفة وهي الأخطاء التي لا يمكن التعرف عليها وليس لها إجراءات قياسية لإكتشافها

: ويمكن أن تبقى ثابتة وتسبب الكثير من الأضرار ومنها :

- أخطاء في برمجة الحاسوب (خلل في الأكواد وأخطاء منطقية) .

- أخطاء في الإستخدام (قيم أو معلومات خاطئة - أخطاء في الشروط الحدية)

3- الأخطاء الموضعية وهي تشير إلى أخطاء الحل عند نقطة معينة في الشبكة أو الخلية .

4- الأخطاء الشاملة وهي خطاء في نظام الحل بأكمله ، تتسرب الأخطاء الموضعية في الأخطاء

الشاملة ويمكن أن تنتقل إلى جميع أنحاء الشبكة .

الوعي بمصادر الأخطاء هذه والقدرة على السيطرة أو التقليل منها هي من الشروط الهامة لتطوير

واستخدام cfd .

2.19.3 التحقق من رموز cfd :

يهدف إلى البحث عن أخطاء في تنفيذ النماذج ويتم عن طريق :

- دراسة برمجة الكمبيوتر عن طريق الفحص المرئي لشفرة المصدر وإختبار البرامج الفرعية الأساسية

بشكل فردي .

- دراسة التقارب التكراري عن طريق رصد النتائج والتغيرات النسبية والتحقق ما إذا كان يحقق السماحية

المطلوبة .

- دراسة الإتساق (التماسك) ومعرفة ما إذا كان المبادئ ذات الصلة محققة .

- فحص الشبكات والتقسيمات وأخطاء تحويل المعادلات .

3.19.3 التحقق من نماذج cfd :

يهدف إلى معرفة ما إذا كان النموذج كافي لأغراض عملية ، ويتم عن طريق :

- التتحقق من أن الرموز تؤدي إلى الحلول العددية الصحيحة .

- مقارنة النتائج مع البيانات التجريبية المتاحة (مع جعل سماحية لأخطاء القياس) لمعرفة ما إذا كان

يتم تمثيل الواقع بما فيه الكفاية .

الهدف من التحقق بصورة عامة هو التأكد من أن رموز cfd تعطي نتائج معقولة ومنطقية لمشكلة التدفق.

: cfd عيوب إسلوب 20.3

نتائج محاكاة cfd قد تكون غير دقيقة لعدة أسباب منها :

- 1- البيانات المدخلة قد تكون غير صحيحة .
- 2- قد يكون النموذج الرياضي غير كاف لحل المشكلة المطروحة .
- 3- دقة النتائج تعتمد على إمكانيات الحاسوب المستخدم .

الباب الرابع

النمدجة والمحاكاة وتحليل النتائج

الباب الرابع

1.4 النمذجة والمحاكاة وتحليل النتائج :

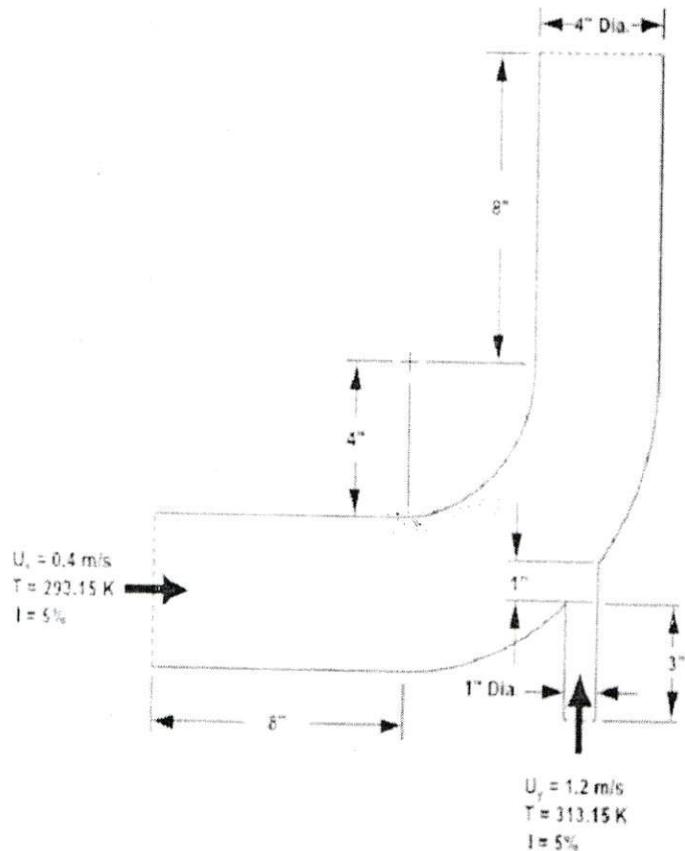
في هذا الباب تم القيام بمحاكاة لإنقال الحرارة في كوع خلط ، حيث يحتوي الكوع على مدخلين ؛ أحدهما يحمل مائع ساخن بدرجة حرارة 313°K والأخر مائع بارد 293°K وملحوظة التغيرات عند مخرج الخليط ، وعند التغير في الشروط الحدية والتغير في الأشكال .

المائع المستخدم هو الماء ، والجدول (4-1) يوضح الخواص الفيزيائية :

القيمة	الخاصية
1000 kg/m^3	الكثافة
4215 J/kg.K	الحرارة النوعية
0.677 W/m.K	الموصلية الحرارية
0.0008 kg/m.s	اللزوجة

الجدول (4-1) خواص الماء عند الظروف الطبيعية

2.4 كوع 90 درجة له مدخل كبير ومدخل صغير :

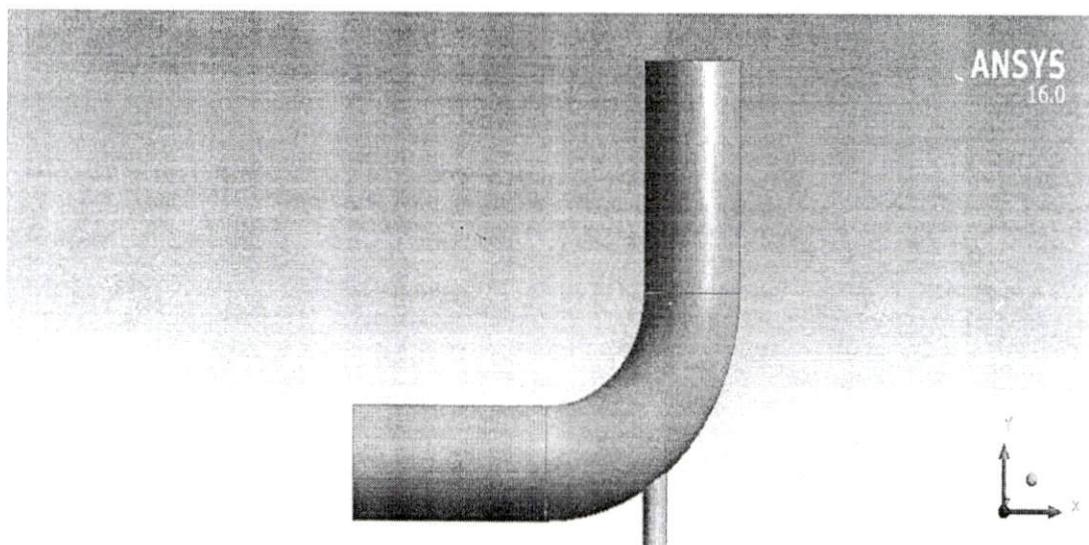


الشكل (4-4) كوع خلط

الشكل (4-1) يوضح كوع خلط له مدخل كبير ومدخل صغير ، حيث ينساب الماء البارد عبر المدخل الكبير في اليسار والماء الساخن عبر المدخل الصغير من أسفل ويكون مخرج الخليط في الأعلى .

لإجراء عملية المحاكاة بإستخدام برنامج (ANSYS) أولاً علينا رسم الشكل الهندسي كما في الشكل

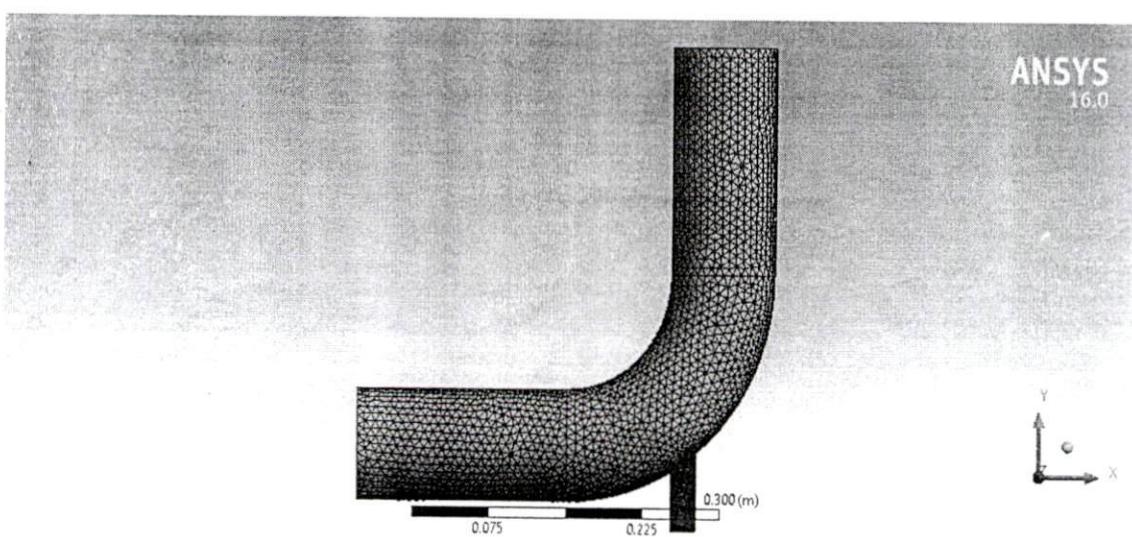
(2-4)



الشكل (2-4) الشكل الهندسي

بعد رسم الشكل الهندسي ننتقل الى مرحلة التقسيمات (mesh) وفيها يتم تحديد المداخل والمخارج وتقسيم

الشكل الى أقسام صغيرة ، كما يوضح الشكل (3-4) .



الشكل (3-4) التقسيمات

حيث تم تقسيم الشكل الى 19739 عقدة و 57907 عنصر . (نلاحظ التقسيمات صغيرة جدا في المخل الصغير لأن معدل السريان كبير) .

بعد ذلك ننتقل الى إدخال الشروط الحدية وإختيار طريقة الحل المناسب وهي ما تعرف بمرحلة (setup)

1.2.4 الشروط الحدية الإبتدائية :

أ- شروط المدخل الكبير :

$$\text{السرعة } (U_x) = 0.4 \text{ m/s}$$

$$\text{درجة الحرارة } (T) = 293.15^\circ \text{ K}$$

$$\text{نسبة كثافة الإضطراب } (\alpha) = 5\%$$

ب - شروط المدخل الصغير :

$$\text{السرعة } (U_y) = 1.2 \text{ m/s}$$

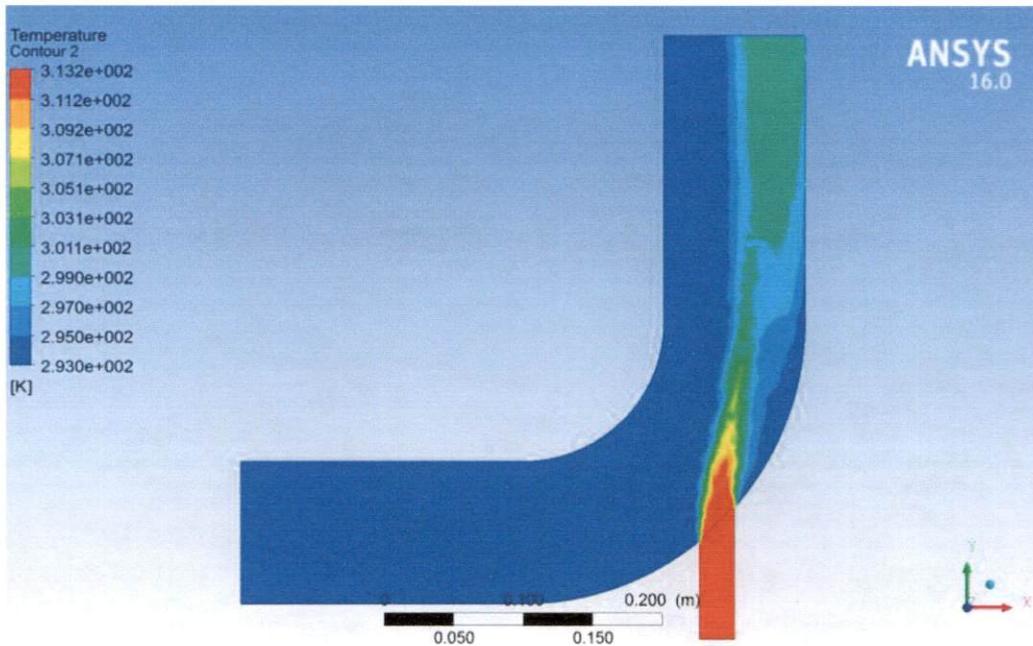
$$\text{درجة الحرارة } (T) = 313.15^\circ \text{ K}$$

$$\text{نسبة كثافة الإضطراب } (\alpha) = 5\%$$

بعد إدخال الشروط الحدية يتم اختيار طريقة الحل ، و طريقة الحل المستخدمة هنا هي (Green-

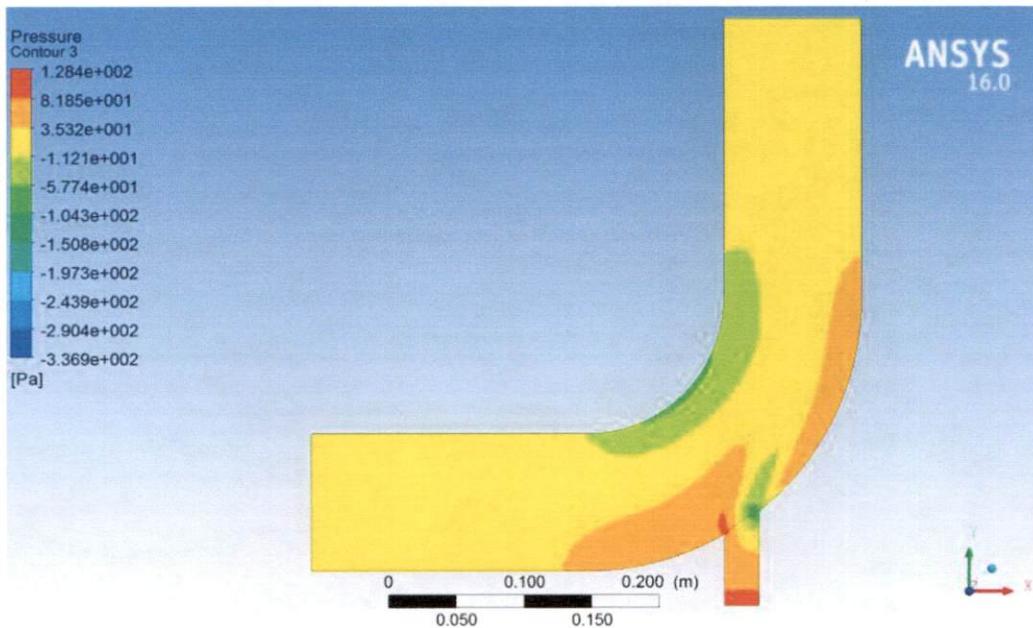
. (Gauss Node Based

بعد إجراء الحل تم التوصل الى النتائج الموضحة في الاشكال التالية :



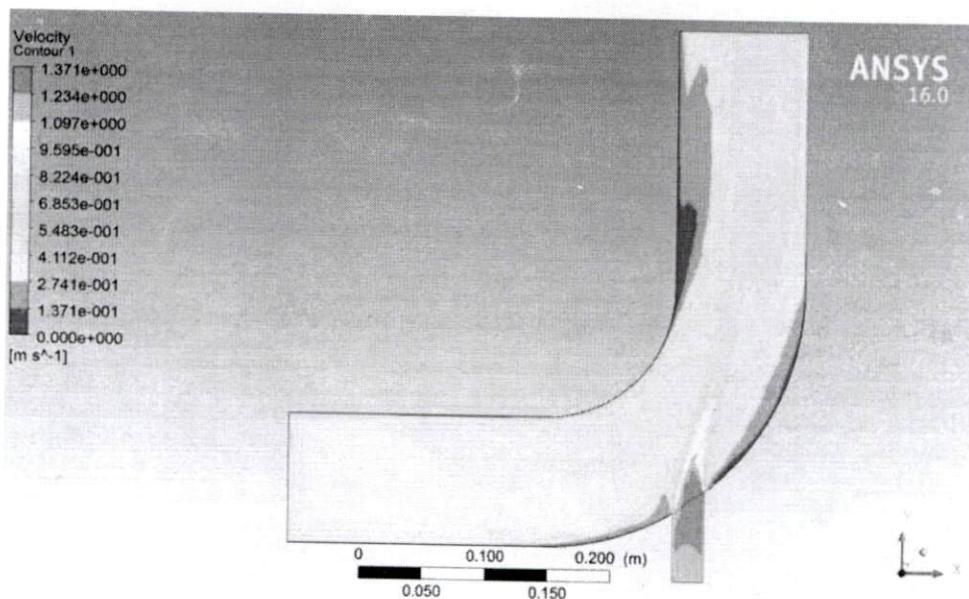
الشكل (4-4) درجة الحرارة

من خلال تدرج الألوان نلاحظ أن أعلى قيمة لدرجة الحرارة كانت في المدخل الصغير ووضحة باللون الأحمر وأدنى درجة حرارة في المدخل الكبير باللون الأزرق ، في منطقة الخلط عند المخرج كانت درجة الحرارة $k = 295.85^\circ$.



الشكل (5-4) الضغط

الشكل(4-5) يوضح الضغط ، حيث يمكن ملاحظة أعلى ضغط عند المدخل الصغير وفي المنطقة قبل المدخل الصغير وبعده . كما نلاحظ إنخفاض نسبي للضغط في المنطقة عند منحنى الكوع والمقابلة للدخول الصغير .



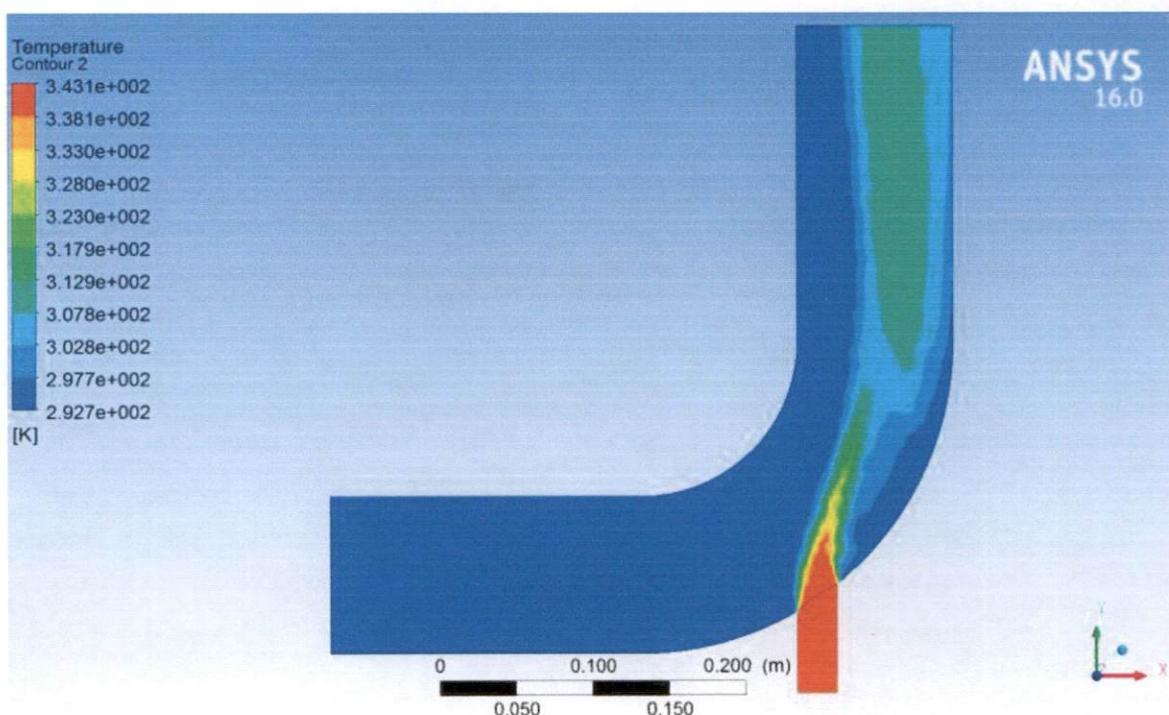
الشكل (6-4) السرعة

الشكل(4-6) يوضح السرعة ، حيث نلاحظ السرعة أعلى سرعة عند المدخل الصغير ، ونلاحظ إنخفاض في السرعة عند جدار الكوع في المنطقة قبل وبعد المدخل الصغير ، كما نلاحظ إنخفاض في السرعة عند الجدار العلوي ناحية اليسار .

2.2.4 زيادة درجة الحرارة :

عند زيادة درجة حرارة المدخل الصغير من ($k = 313.15^{\circ}\text{K}$) الي (343°K) نحصل علي النتائج

التالية :



الشكل (4-7) درجة الحرارة

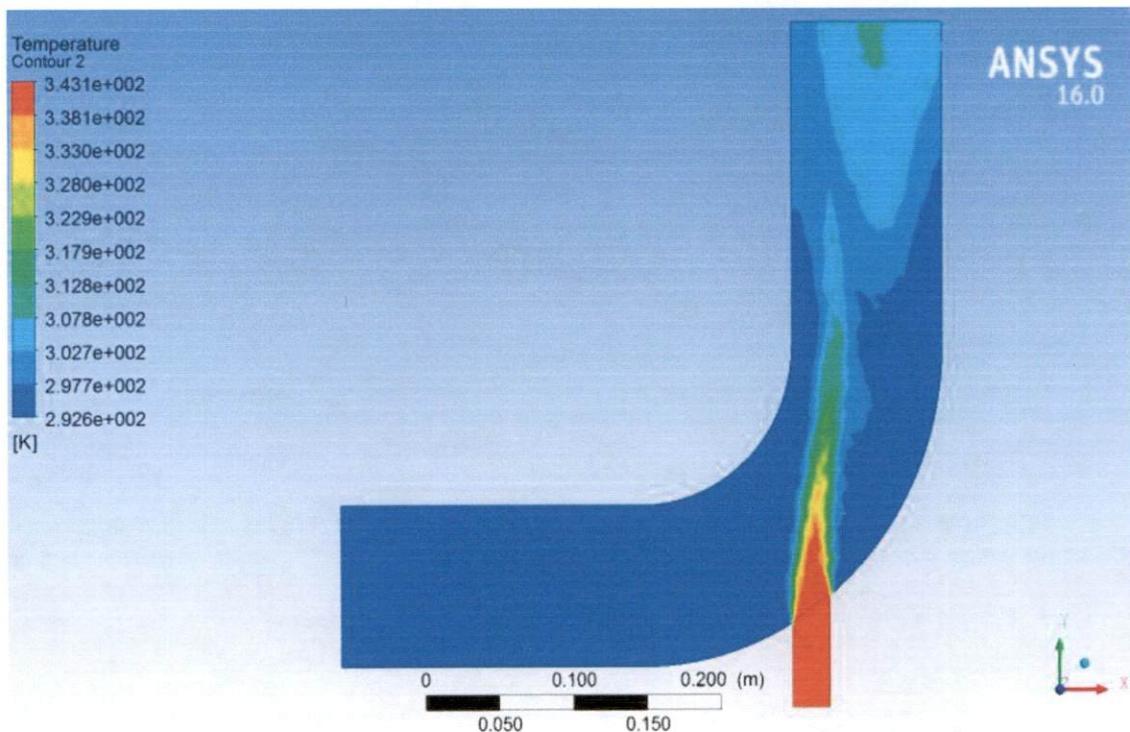
الشكل يوضح تدرج درجة الحرارة خلال الكوع ، الزيادة في درجة حرارة المدخل الصغير تؤدي الي زيادة درجة حرارة الماء عند منطقة الخليط في المخرج ، حيث أصبحت درجة حرارة المخرج هي $. 299.9^{\circ}\text{K}$

ولا يوجد تغير في السرعة والضغط .

3.2.4 زيادة السرعة ودرجة الحرارة :

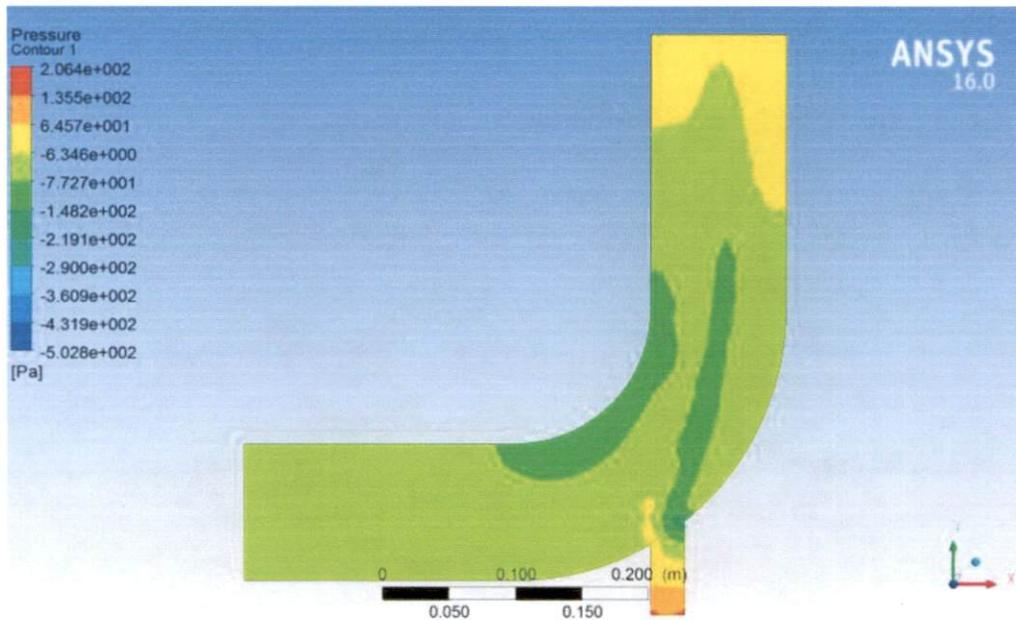
عند زيادة درجة الحرارة الي 343°K وزيادة سرعة المدخل الصغير من 1.2 m/s الي 2 m/s

التحصل علي النتائج التالية :



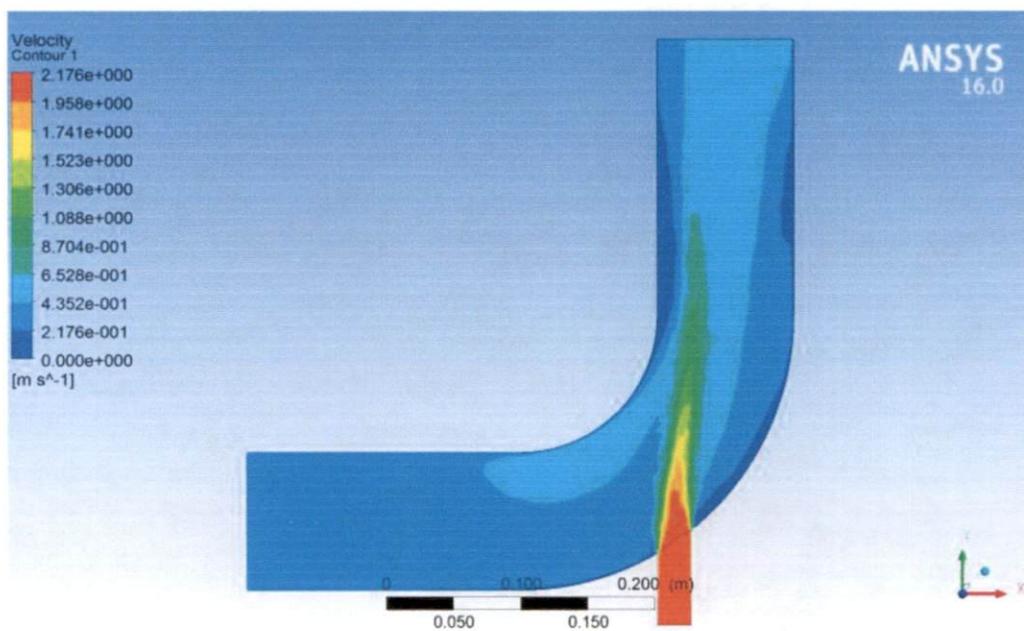
الشكل (8-4) درجة الحرارة

الشكل (8-4) يوضح تدرج درجة الحرارة خلال الكوع ، حيث نلاحظ أن هنالك زيادة في إنتقال الحرارة من المدخل الساخن الي الماء البارد حتى أصبحت درجة الحرارة عند المخرج 304.4°K .



الشكل (9-4) الضغط

الشكل (9-4) يوضح تغير الضغط علي الكوع ، حيث نلاحظ إنخفاض في الضغط عند زيادة السرعة .



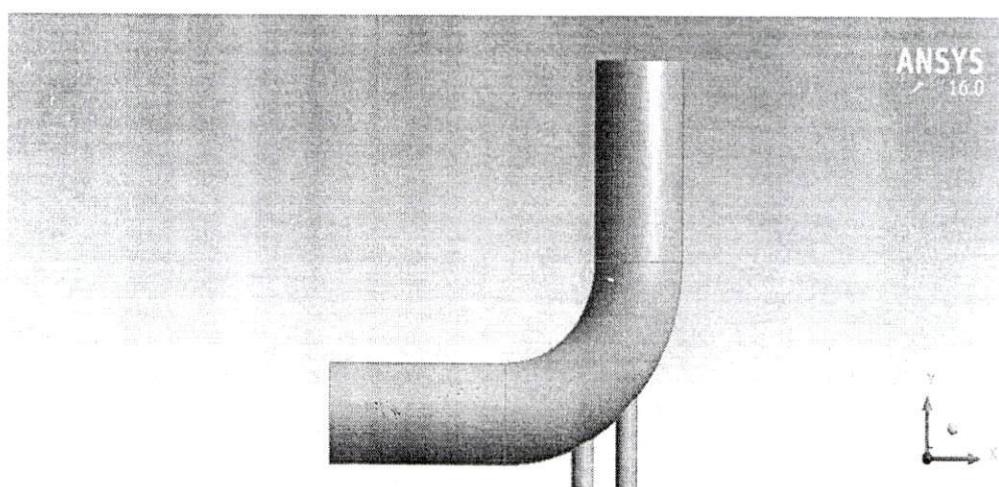
الشكل (10-4) السرعة

الشكل السابق يوضح السرعة ، ونلاحظ زيادة السرعة عند المدخل الصغير وبالتالي زيادة السرعة عند المخرج .

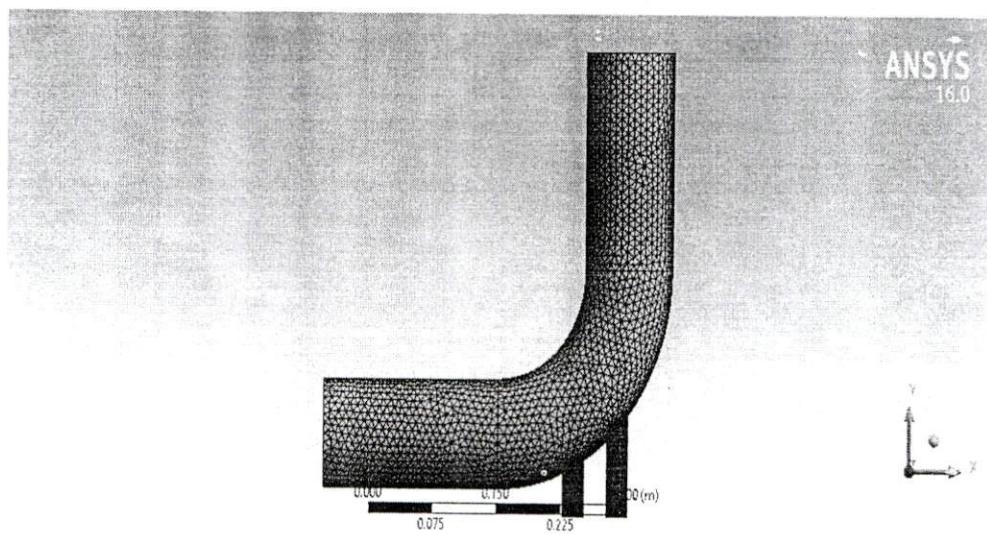
3.4 كوع 90 درجة يحتوي على مدخلين صغارين :

عند إضافة مدخل صغير آخر بحيث يصبح الكوع يحتوي على مدخلين صغارين للماء الساخن

ومدخل كبير للماء البارد كما في الشكل التالي :



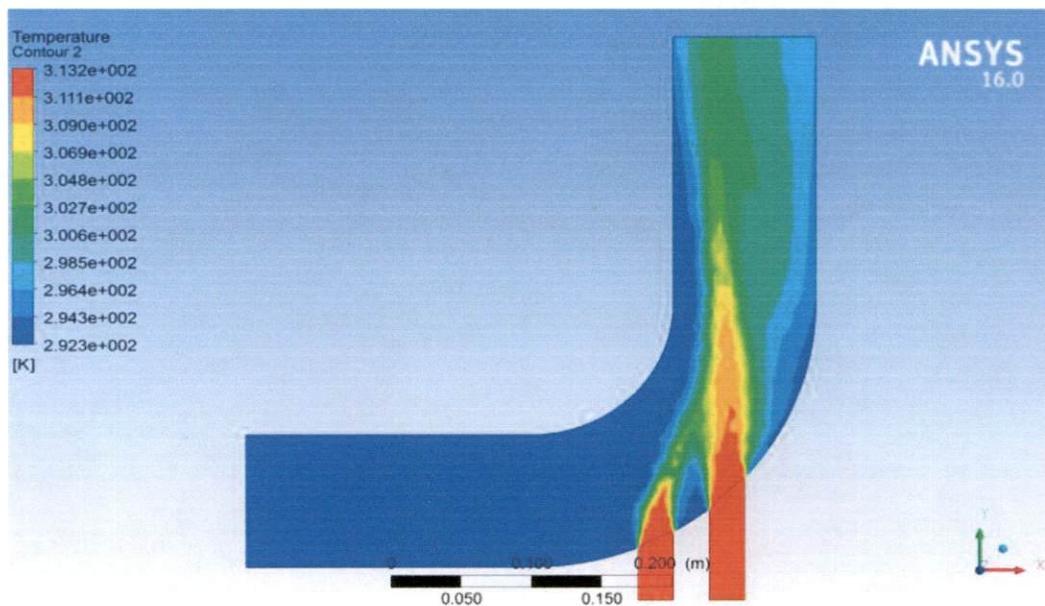
الشكل (11-4) الشكل الهندسي



الشكل (12-4) التقسيمات

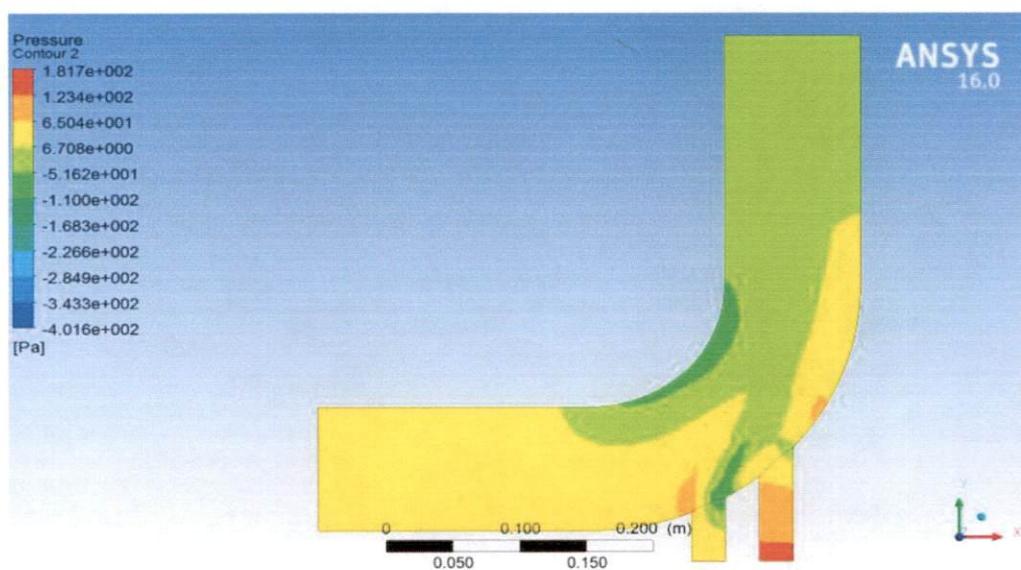
الشكل (12-4) يوضح عملية التقسيم حيث تم تقسيم الشكل الى 25854 عقدة و 75247 عنصر .

1.3.4 الشروط الحرية الإبتدائية :



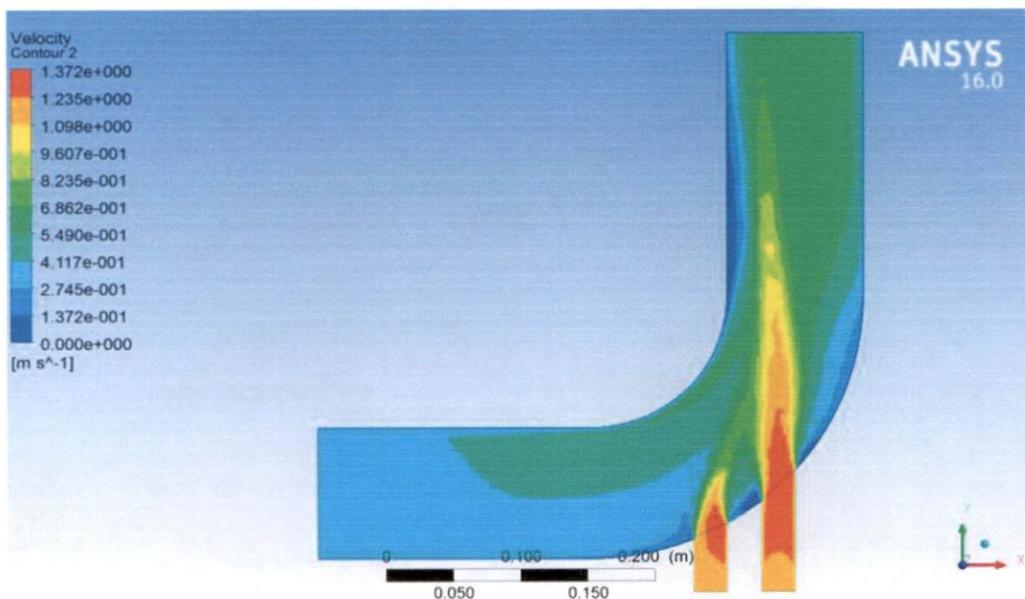
الشكل (13-4) درجة الحرارة

الشكل(13-4) يوضح تدرجات درجة الحرارة حيث نجد أن أعلى قيمة لدرجة الحرارة في المدخل الصغيرة هي $k = 313.15^\circ$ ، وأقل قيمة لدرجة الحرارة عند المدخل الكبير هي $k = 293.15^\circ$ ، وعند المخرج تساوي $k = 298.18^\circ$



الشكل (14-4) الضغط

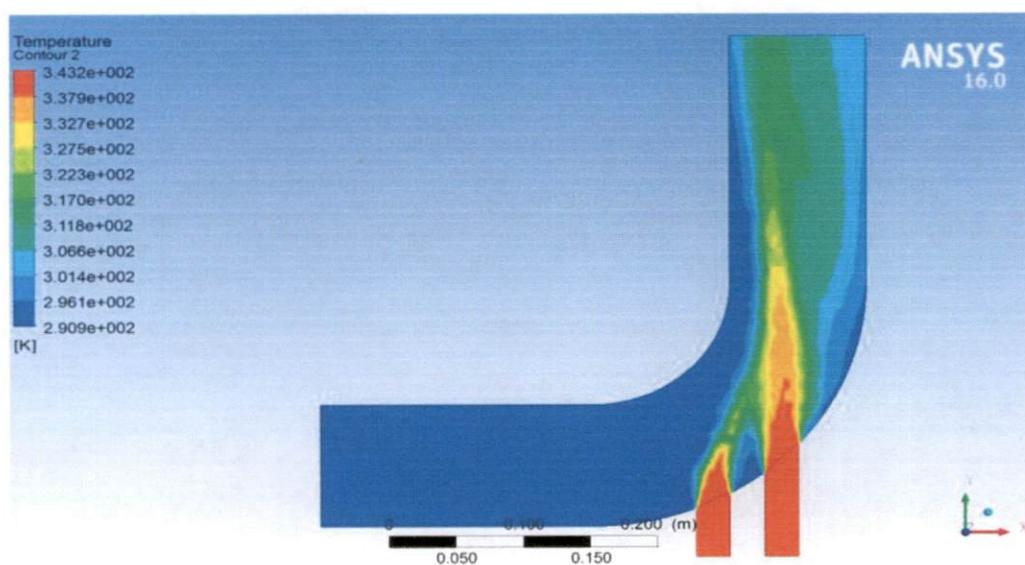
الشكل(4-14) يوضح الضغط على الكوع ، نلاحظ إرتفاع الضغط عند المدخل الصغير الأيمن و عند المدخل الكبير ، كما نلاحظ إنخفاض الضغط في منطقة إحناء الكوع وعند المخرج .



الشكل (4-15) السرعة

الشكل (4-15) يوضح السرعة داخل الكوع ومن خلال الألوان يمكن معرفة السرعة في أي نقطة .

زيادة درجة الحرارة: 2.3.4



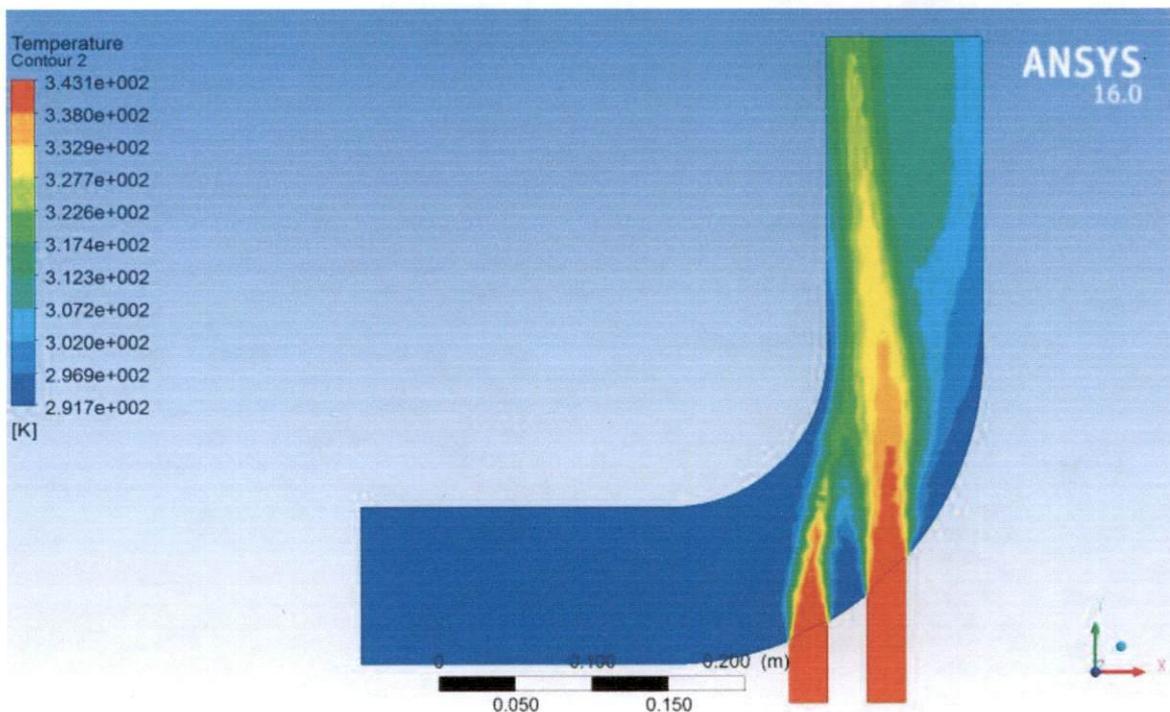
الشكل (4-16) درجة الحرارة

في الشكل (4-16) تم زيادة درجة حرارة الماء في المداخل الصغيرة من 313.15°K إلى 343°K .

نلاحظ زيادة درجة الحرارة في المداخل الصغيرة تؤدي إلى زيادة درجة الحرارة في المخرج حيث أصبحت درجة حرارة المخرج تساوي 305.7°K . ولا يوجد تغير في السرعة والضغط.

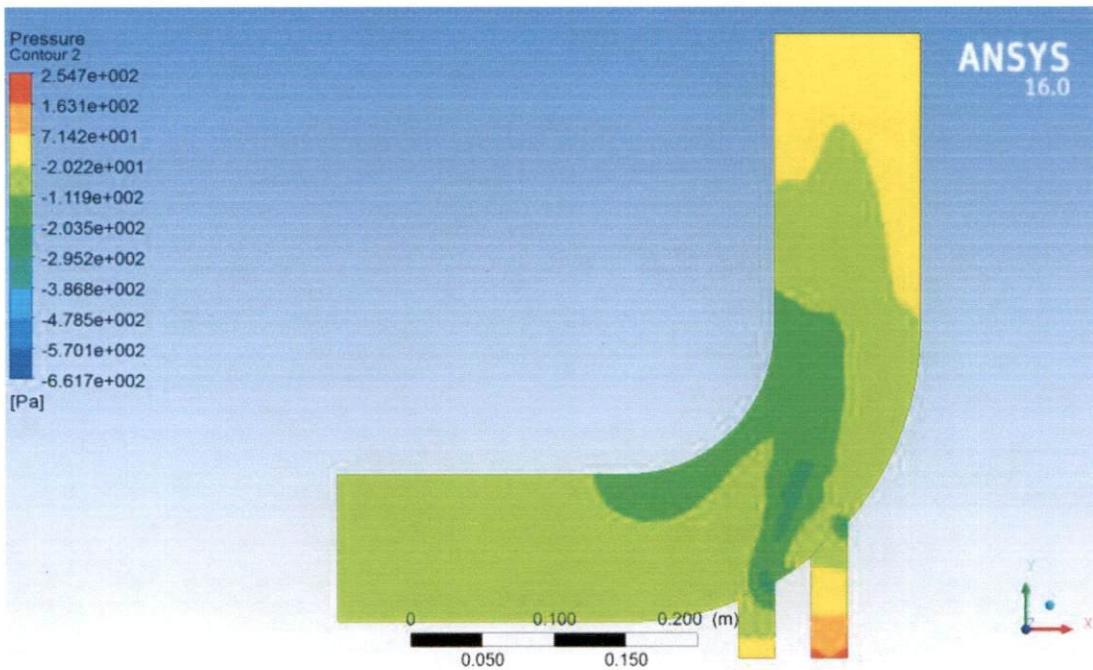
3.3.4 زيادة درجة الحرارة والسرعة :

عند زيادة درجة الحرارة إلى 343°K والسرعة إلى 2 m/s في المداخل الصغيرة تم التحصل على الناتج التالى :



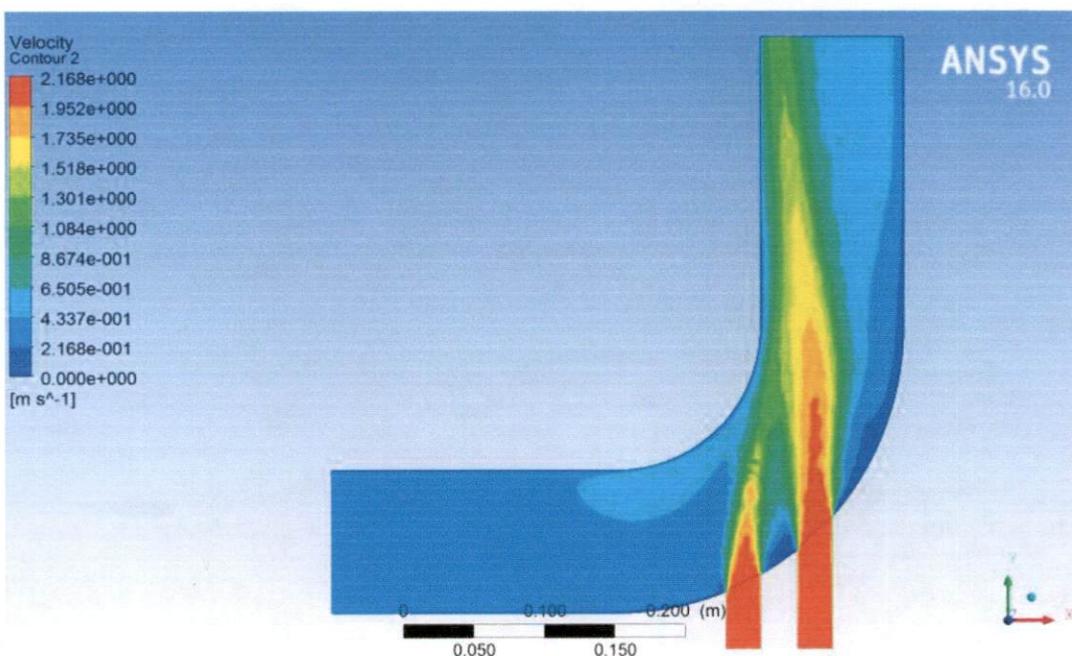
الشكل (4-17) درجة الحرارة

نلاحظ أن زيادة درجة الحرارة والسرعة في المداخل الصغيرة يؤدي إلى زيادة درجة الحرارة ناحية مخرج الكوع حيث أصبحت درجة الحرارة في المخرج 310.5°K .



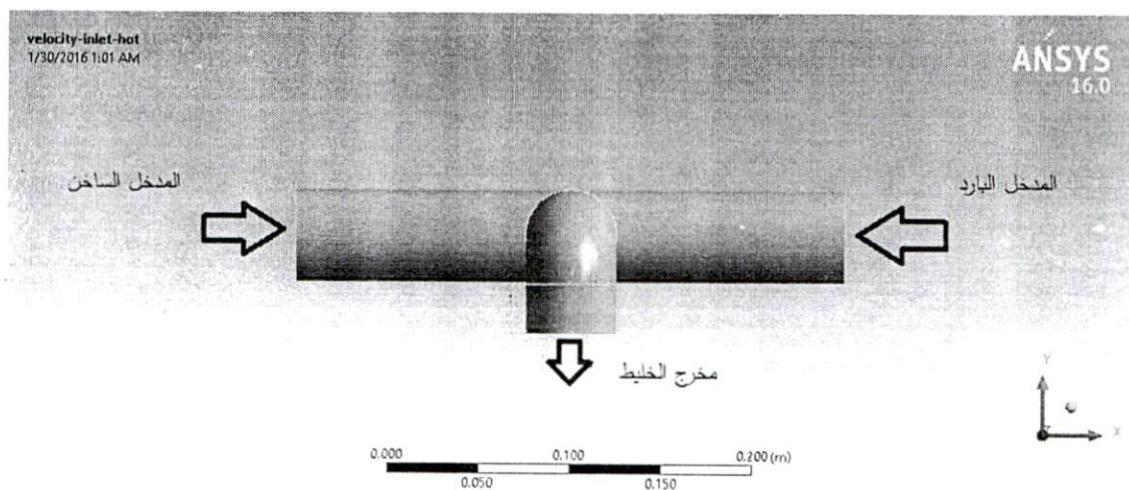
الشكل (18-4) الضغط

من الشكل (4-18) نلاحظ أن زيادة السرعة في المدخل الصغيرة يؤدي إلى إنخفاض الضغط ناحية المدخل وزيادة الضغط في مخرج الكوع .



الشكل (19-4) السرعة

: (T) 4.4 كوع حرف (T)



الشكل (20-4) كوع حرف (T)

1.4.4 الشروط الحدية الإبتدائية:

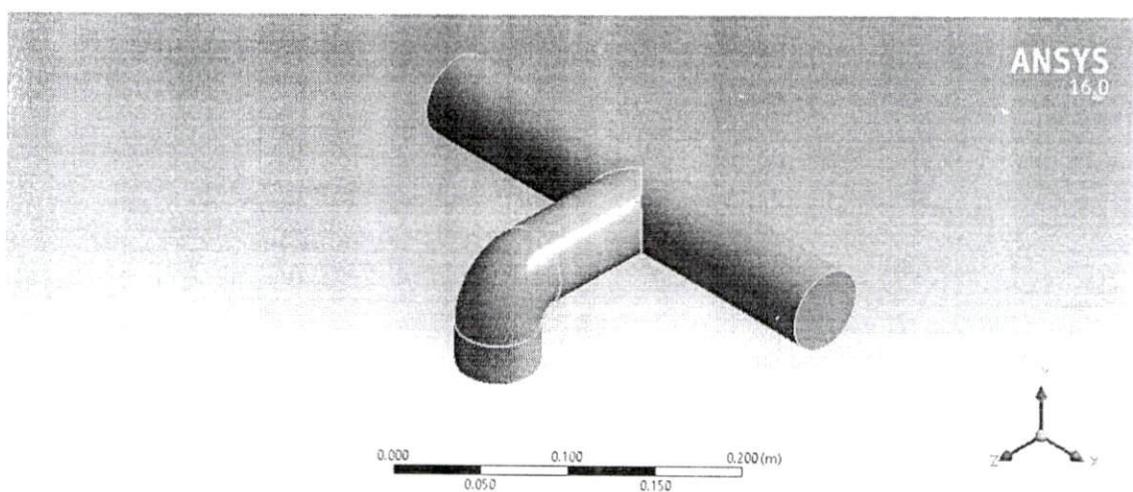
$$\text{درجة حرارة المدخل الساخن} = 313.15^\circ \text{K}$$

$$\text{السرعة في المدخل الساخن} = 0.5 \text{ m/s}$$

$$\text{درجة حرارة المدخل البارد} = 293.15^\circ \text{K}$$

$$\text{السرعة في المدخل البارد} = 0.4 \text{ m/s}$$

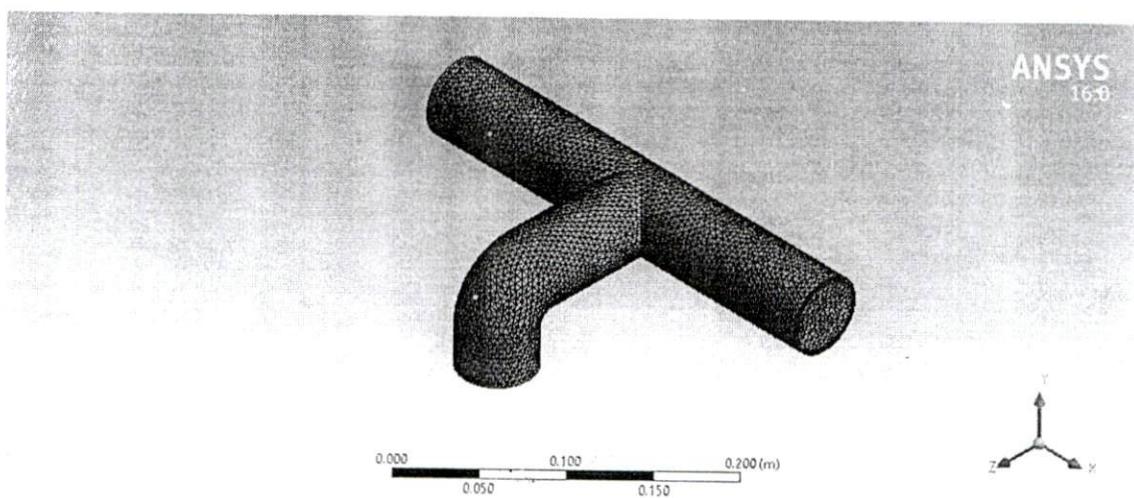
الشكل الهندسي :



الشكل (21-4) الرسم الهندسي

الشكل (21-4) يوضح عملية رسم الشكل الهندسي للكوع .

عملية التقسيم :

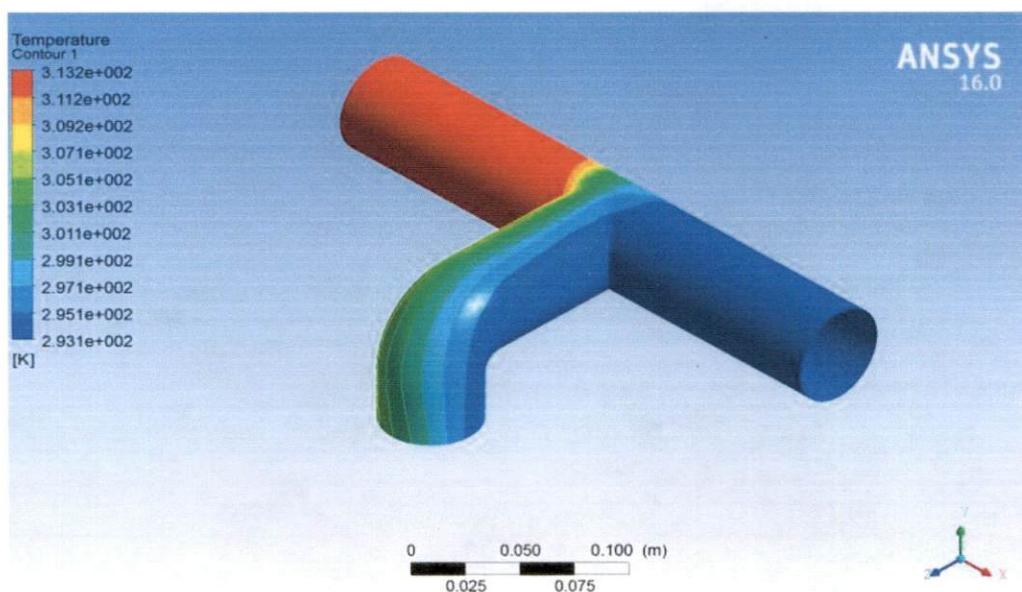


الشكل(22-4) التقسيمات

حيث تم تقسيم الشكل الى 51235 عقدة و 170192 عنصر .

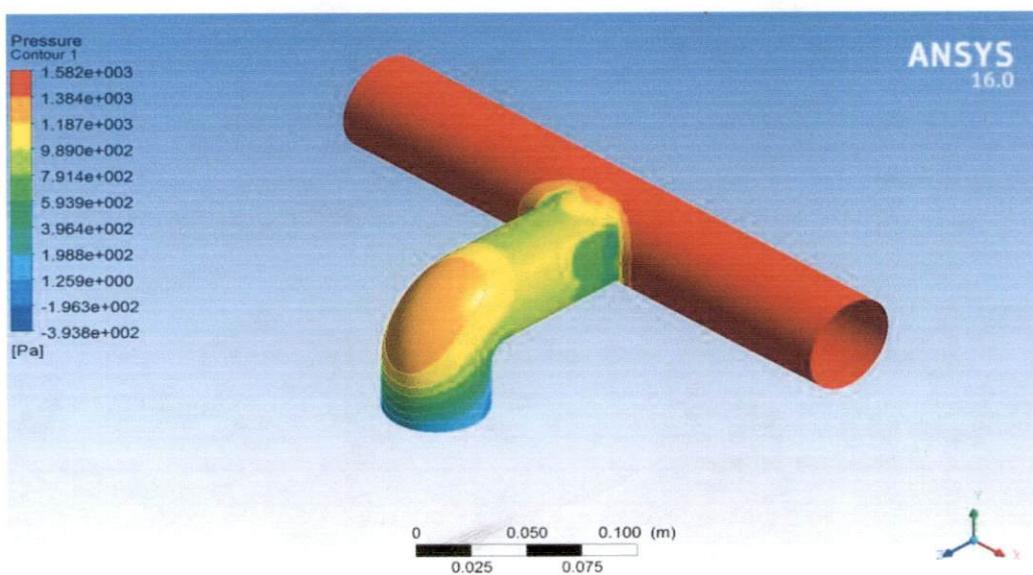
النتائج :

بعد إجراء عملية التحليل العددي تم الحصول على النتائج التالية :



الشكل (23-4) درجة الحرارة

الشكل (23-4) يوضح درجة الحرارة خلال الكوع حيث نلاحظ أن أعلى درجة حرارة عند المدخل الساخن وأقل درجة حرارة في المدخل البارد بينما درجة الحرارة في المخرج هي 302.4°K .



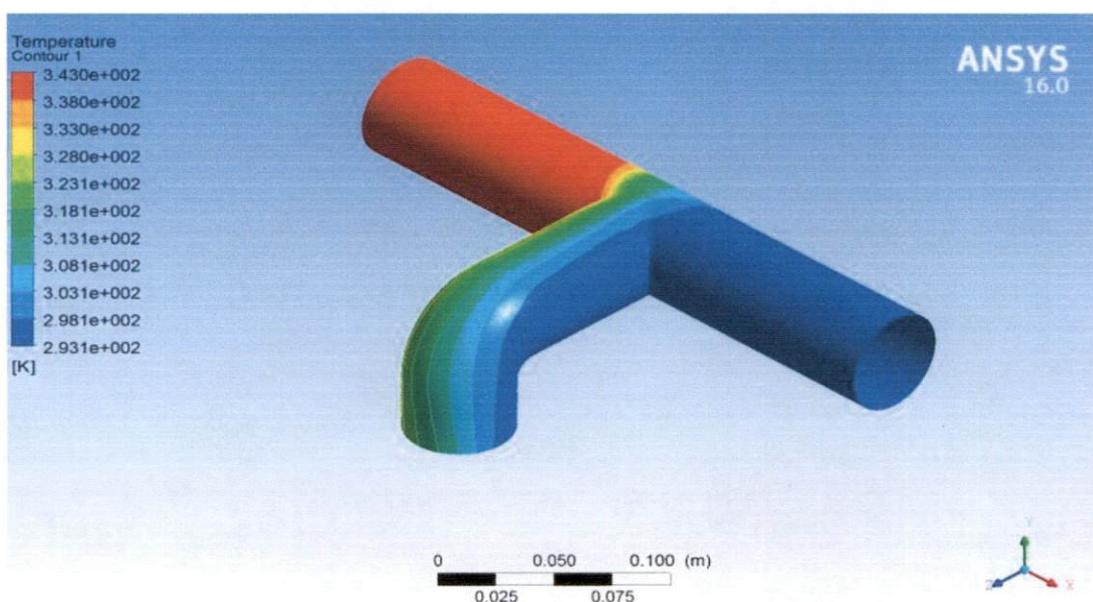
الشكل (24-4) الضغط

الشكل (24-4) يوضح الضغط خلال الكوع ، حيث نلاحظ إرتفاع في الضغط عند مداخل ومنطقة منحنى الكوع ، بينما ينخفض الضغط نسبياً عند المخرج .

التغيير في الشروط الحدية :

2.4.4 زيادة درجة الحرارة :

عند زيادة درجة الحرارة في المدخل الساخن الي 343°K نتحصل علي النتائج التالية :

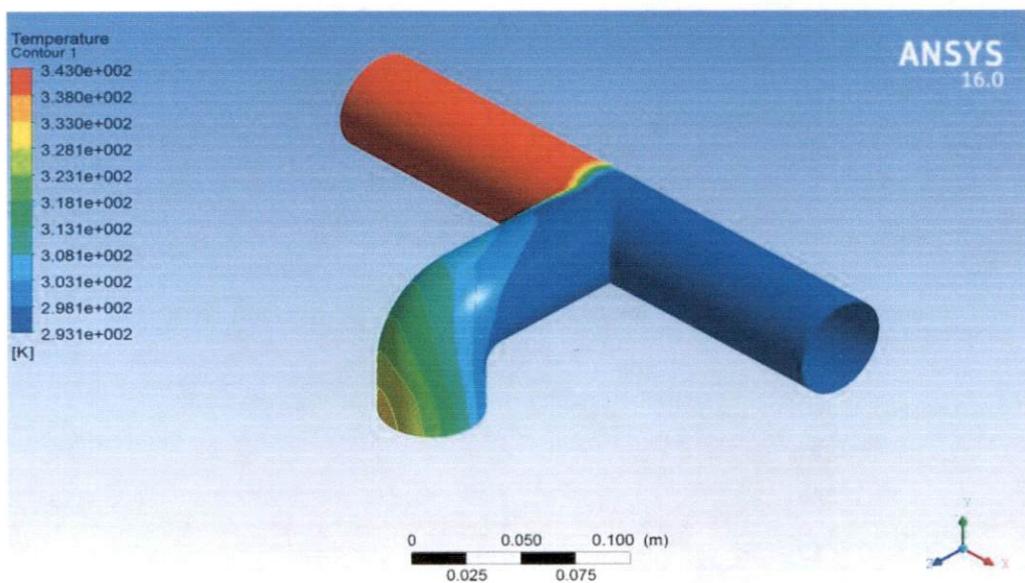


الشكل (25-4) درجة الحرارة

حيث زادت درجة الحرارة في المخرج الي 312.3°K . ولا يوجد تغير في الضغط .

3.4.4 زيادة السرعة ودرجة الحرارة :

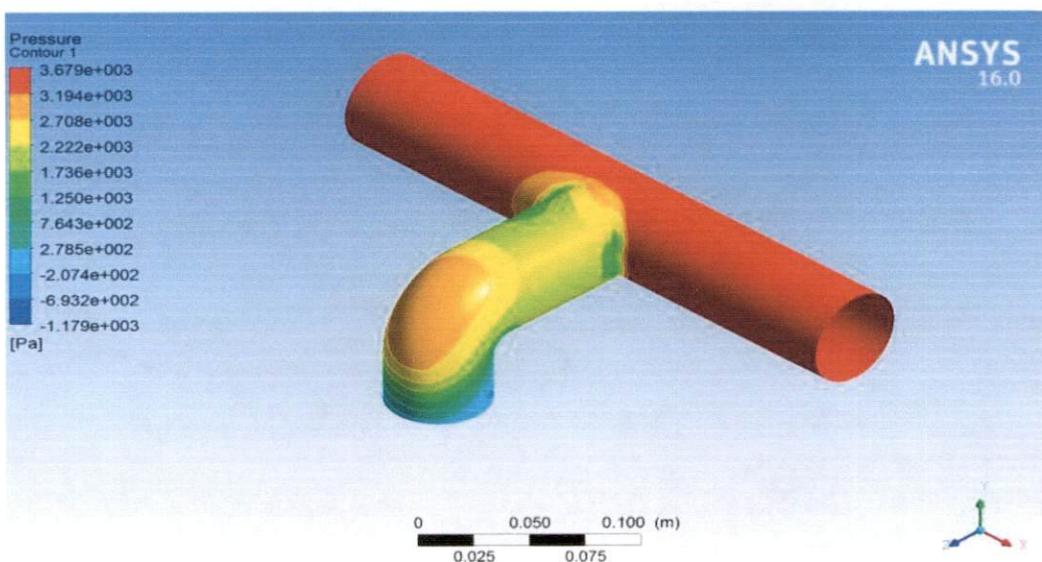
عند زيادة السرعة الى 1 m/s ودرجة الحرارة 343° K تم الحصول على النتائج التالية :



الشكل (26-4) درجة الحرارة

الشكل (26-4) يوضح درجة الحرارة ، حيث نلاحظ أن زيادة سرعة المدخل الساخن أدى إلى زيادة

درجة الحرارة في المخرج حيث أصبحت درجة حرارة المخرج تساوي 318° K .



الشكل (27-4) الضغط

الشكل (4-27) يوضح الضغط خلال الكوع ، حيث نلاحظ أن زيادة السرعة أدت إلى زيادة الضغط في مداخل الكوع وعند المنحني .

الباب الخامس

الخلاصة والتوصيات

الباب الخامس

1.5 الخلاصة :

في هذا المشروع تم عمل محاكاة للتدفق في كوع خلط ، حيث تم استخدام كوع خلط 90 درجة بمدخل واحد وتم تغيير الشروط الحدية حيث لوحظ أن زيادة درجة الحرارة في المدخل يؤدي إلى زيادة درجة حرارة الخليط في المخرج كما أن للسرعة تأثير واضح على الضغط حيث أن زيادة سرعة المائع في المدخل يؤدي إلى زيادة الضغط في المخرج .

أيضاً تم تغيير الشكل حيث تمت إضافة مدخل آخر صغير بدرجة حرارة أعلى ولوحظ أن هناك زيادة واضحة في درجة حرارة الخليط عند المخرج وأثر زيادة السرعة أصبح كبير ، أيضاً تم إجراء المحاكاة لکوع خلط حرف (T) وتم الحصول على النتائج في شكل صور .

2.5 التوصيات:

نوصي بأن يتم استخدام إسلوب ديناميكا المواقع المحوسبة في عمليات التصنيع بحيث يتم عمل نمذجة ومحاكاة للتطبيقات الهندسية قبل الشروع في عملية التصنيع وذلك لمعرفة المشاكل أو العيوب التي يمكن أن تواجهنا ، لأن التجارب المعملية تعتبر مكلفة وبطيئة في نفس الوقت بالرغم من أنها قد تكون أكثر دقة ، كما نوصي بأن تستخدم المحاكاة في التطبيقات التي يكون فيها خطورة علي حياة الإنسان (مثل المواد المشعة) اذا تم عمل تجارب لها في المختبر .

كما نوصي بعمل محاكاة لأنواع مختلفة من الأكواع ويتم تغيير الشكل في كل مرة وملاحظة أفضل الأنواع التي تؤدي النتائج المطلوبة بأقل تكلفة .

المراجع

References

1. CFD-Wiki <http://www.cfd-online.com/Wiki/MainPage> .
2. P. Wesseling, Principles – 2001 – Computational Fluid Dynamics.
3. John Wiley & Sons –2001– CFD Techniques: An Introduction
Based on Finite Element Methods.
4. Wiley & Sons –1990–Numerical Computation of Internal and
External Flows.